

La didactique des mathématiques comme didactique d'une science étonnante.

François Conne, Universités de Genève et de Lausanne, Suisse

1. Introduction.

1.1 J'ai reçu de la part de la rédaction de l'Éducateur la commande suivante : rédiger un article qui ferait le lien entre la recherche en didactique des maths et les apports et les limites rencontrées dans les classes.

1.2 Je ne veux pas répondre en me faisant porte parole de la recherche en didactique des mathématiques, et a fortiori encore moins de la recherche en général. Je me refuse à donner une réponse institutionnelle et politique. Aussi je vous propose une réponse, au demeurant très partielle, à une question légèrement modifiée : quels peuvent être les apports d'un chercheur en didactique des mathématiques aux classes et en quoi ces apports sont-ils limités ?

1.3 Les apports d'un chercheur en didactique des mathématiques sont ce qu'il trouve. Dire ainsi les choses me permet de décrire quelques limites intrinsèques à la démarche du chercheur. a) Il fait un pari, risqué : il arrive qu'il ne trouve rien ou si peu ... b) Ce pari est plus exigeant qu'un simple coup de dés, il suppose un investissement plus qu'une mise, c'est-à-dire tout un temps consacré en études et en expérimentations.

1.4 Je conjugue mon travail sur quatre plans, qui sont autant de modalités de la recherche. Les voici du plus fermé au plus ouvert : apprendre, explorer, questionner, comprendre. Je ne travaille pas tout seul, ni exclusivement pour moi-même à l'avancement de ma seule connaissance du monde. Avec mes collaborateurs, qu'ils soient chercheurs ou non, j'échange le produit de mes interventions expérimentales, les résultats qu'elles me permettent d'établir et les découvertes escomptées dans mes paris.

1.5 Les personnes avec qui je collabore, n'oublions pas les élèves eux-mêmes, n'ont pas le temps d'attendre que j'aie établi mes résultats, formulé mes découvertes et encore moins les aie fait reconnaître. Les produits, ici et maintenant, de mes interventions prennent donc à leurs yeux sans doute plus d'importance si ce n'est plus de valeur que les fruits de mes études. C'est donc ceci que je dois leur apporter en échange de leur contribution à mes recherches, à commencer par le très bon accueil que je reçois.

1.6 Je n'ai hélas pas la place pour détailler et bien décrire cet aspect de mon travail. Cela fait plus de 15 ans que, semaine après semaine, je suis accueilli les bras ouverts dans les institutions de l'Es au canton de Vaud, que les élèves ne cessent de me demander de pouvoir travailler avec moi et que les enseignants, les uns après les autres, se disent ébahis de voir comment je pratique les mathématiques avec ces enfants. Je compte aussi quelques émules. Tous les propos qui suivent sont fondés sur ma grande expérience du travail avec les élèves et leurs enseignants.

2. Une des choses que mes recherches m'ont permis de découvrir.

2.1 La manière classique de penser les mathématiques que l'on veut enseigner fait une large part à l'opposition entre deux idées : la réussite - assurée par la maîtrise des techniques - et la compréhension - assurée par la maîtrise du raisonnement. A l'école, on propose les mathématiques comme une discipline – l'appropriation de techniques fiables – et comme une intelligence – le développement de certaines compréhensions des choses. Le modèle de cette relation bipolaire est le problème scolaire où l'élève se voit défié à produire, moyennant un certain raisonnement, une solution (qui réponde à la question du problème).

2.2 On conjugue ce schéma avec une idée de progression - que ce progrès soit celui d'un développement naturel, qu'il soit celui d'un apprentissage provoqué ou celui d'un programme d'enseignement. À l'école le moteur des apprentissages programmés consiste en une série de défis que l'on impose aux élèves : on leur demande de réussir à accomplir telle tâche, de trouver la réponse à telle question, de découvrir la solution à tel problème... A celui qui réussit l'épreuve, on attribue une certaine compréhension que l'on va de suite confronter par de nouveaux défis, établissant, nonobstant une bonne graduation des difficultés, une marche conjointe dans la maîtrise et la compréhension des mathématiques.

2.3 Que se passe-t-il en cas d'échec au défi ? On applique le même schéma exactement, mais en l'accommodant au cadre d'une reprise. Suite à un constat d'échec, on diagnostique une incompréhension¹. On tente de relancer l'élève dans une progression en remplaçant le curseur de l'enseignement à une étape antérieure afin d'ajuster les défis à ses possibilités supposées.

2.4 Nous observons dans l'enseignement spécialisé qu'il arrive que ce procédé de recalage ne suffise pas, que le moteur n'embraye pas et que, à force de surplace voire de régressions, les retards ne cessent de s'accumuler. Ainsi il est très fréquent qu'on y enseigne pour une n-ième fois l'addition ou la soustraction en colonnes à des adolescents et à de jeunes adultes. Ce faisant, on néglige des pans entiers de l'enseignement, en particulier en matière de logique ou de géométrie. Parfois même, ce sont les élèves qui se comportent comme s'ils s'ingéniaient à enrayer la belle marche didactique qu'on voudrait leur dispenser.

2.5 Ainsi, lorsqu'on rencontre de réelles difficultés à assurer la progression dans les apprentissages programmés – difficultés d'apprentissage de la part de certains élèves, difficultés d'enseignement de certains savoirs - ce schéma bipolaire du réussir et du comprendre se révèle étroit, rigide et finalement aussi piégeant qu'une ornière dans un terrain boueux.

2.6 Pour nous en déprendre, il suffit de considérer que les mathématiques ne se réduisent pas à être une discipline ni même un art, mais que c'est d'abord une science qui nous apprend des choses sur le monde. En observant attentivement ce qui nous arrive lorsque nous faisons des mathématiques d'une manière un tant soit peu authentique, on ne peut que constater que tout ne saurait se décliner sur les seuls modes de la réussite et de la compréhension. Ce serait faire trop peu cas de toutes les surprises que les mondes mathématisés nous occasionnent. Ch. S. Peirce (1903, c.f. 2002) considère que c'est la règle de ce que nous pouvons apprendre par expérience : L'expérience est notre seul maître. (...) Mais comment s'effectue au juste cette action de l'expérience ? Elle s'effectue par une série de surprises. (...). C'est par des surprises que l'expérience enseigne tout ce qu'elle daigne nous enseigner.

2.7 Nous investissons le réel de significations que nous lui attribuons, c'est ce que j'appelle milieu de nos interactions. Chaque fois que nous entreprenons de faire quelque chose, nous comptons sur cette sémiotisation du milieu. Cela provoque parfois des événements inattendus, et c'est la surprise.

¹ Il y a toute une graduation des incompréhensions que l'on peut envisager allant de la non compréhension de la consigne à des lacunes d'apprentissages etc.

Sur le moment elle peut sembler le fruit d'un hasard. Nous pouvons certes nous détourner de l'expérience, la gommer, mais nous pouvons aussi en chercher une signification qui nous permette de nous ressaisir, en actes ou en pensées. En quel cas, la surprise intrigue, éventuellement nous questionne – pôle de compréhension – et nous défie parfois à la reproduire - pôle de réussite. Là s'offre à nous une opportunité de quitter la simple contingence. Qu'une surprise se réplique et son effet en sera augmenté. Plus encore et la répétition devient lassante. Ce que nous en aurons compris nous laissera blasés ou amusés².

2.8 La surprise n'est pas une idée de substitution. Au contraire, il s'agit d'un troisième terme à intercaler entre les pôles de la réussite et de la compréhension. Ces dernières sont attribuables au sujet. Le propre de la surprise est de rompre avec cette manière outrée de tout rapporter au sujet³. En effet, s'il y a une chose qu'on ne peut s'attribuer, que ce soit sur le mode de la réussite ou sur celui de la compréhension, c'est bien la surprise. En elle, le monde exprime sa préséance. Ainsi la surprise n'est ni le fruit d'une discipline, ni celui d'une intelligence, mais elle féconde la connaissance. Ch. S. Peirce le souligne fort à propos (ibid) : Le phénomène de surprise est en soi éminemment instructif (...) : il met en effet l'accent sur un mode de conscience que l'on peut déceler dans toute perception, à savoir, la double conscience à la fois d'un ego et d'un non-ego, agissant directement l'un sur l'autre.

3. Ce que j'ai découvert n'est pas la surprise ni ses vertus mais la place centrale qu'elle occupe au confluent de considérations diverses.

3.1 Les vertus de la surprise ont déjà maintes fois été mises à profit. Ainsi par exemple, il y a maintenant un peu plus d'une dizaine d'années, des chercheurs en psychologie ont pu imaginer des expériences montrant que les bébés s'étonnent de la disparition ou de l'apparition de marionnettes ; les chercheurs interprètent ces signes de surprise comme la preuve de compétences très précoces en arithmétique chez l'enfant. Néanmoins, dans le cadre de telles recherches, la surprise n'est qu'un artifice expérimental : elle est provoquée par une sorte de leurre, et son observation est alors tenue pour révélatrice de certaines compétences du sujet. L'expérimentateur joue une farce au bébé, il n'attend pas que le bébé en retire quoi que ce soit comme enseignement.

3.2 Ce que le chercheur trouve ne se résume pas à une idée quand bien même elle ait été formulée par un personnage aussi génial que Ch. S. Peirce. Pour ma part, je ne suis venu que très progressivement à attribuer tant d'importance à la surprise, et ce n'est que récemment que je suis tombé sur les passages de la conférence de cet auteur, tenue à l'université de Harvard en 1903. Ce qui importe est la place qu'elle prend dans un réseau conceptuel intéressant la ddm. Au paragraphe précédent je vous y ai introduit en situant la surprise comme complément d'un schéma classique étriqué. J'ai aussi insisté sur le fait que la surprise était le signe que le milieu nous faisait de son autonomie – il ne se laisse en effet jamais vraiment conter par nos savoirs habituels et nos modèles usuels. Un seul exemple suffira : pensez à la réduction grossière que l'on fait chaque fois que l'on ramène les expériences mathématiques que l'on peut faire avec des pliages à la notion très abstraite de symétrie plane.

Cela constitue déjà un réseau assez complexe que je ne puis détailler ici. N'ayant de loin pas épuisé toutes les considérations qu'il faudrait faire à son propos, je devrai me contenter de vous en faire un

2 Il y a quelque chose d'irréductible dans la surprise pour qui n'oublie pas ce qui l'aura occasionnée. Quoique je puisse en penser ultérieurement il reste que ceci ou cela m'aura surpris. Par exemple, si je plie une feuille de papier rectangulaire en appliquant un sommet sur son sommet opposé diagonalement, puis que je plie une seconde fois en deux mon morceau plié, en l'appliquant cette fois bords sur bords, je reste surpris, lorsque je déplie le tout, de constater qu'un des deux plis marque la diagonale du rectangle. Pourtant je sais parfaitement pourquoi il ne saurait en être autrement. Notez que plier, directement, une feuille rectangulaire le long de sa diagonale est une action malaisée.

3 Pour moi, il va de soi que la surprise ne saurait être confondue avec une prise de conscience ni interprétée comme telle. Le faire serait, une fois de plus, ramener les choses au subjectif. La surprise nous mène ailleurs, comme le dénote l'expression qui dit de quelqu'un qu'il est revenu de sa surprise.

exposé très incomplet.

3.3 Dans mes recherches en ddm, j'entends donc exploiter la surprise comme un moteur de l'expérience, du savoir et de la pensée. Toute action didactique est à double fond. En ce qui concerne les surprises il en découle qu'il faut les considérer par trois fois :

- Premier degré : les surprises que le milieu réserve à l'élève. Par exemple pensant découper un rond sur le pli d'un feuillet, l'élève obtient un trou en forme de lunettes.

- Premier degré encore : les surprises que ce même milieu réserve à celui qui pilote l'expérimentation, l'enseignant ou un chercheur. Par exemple ayant proposé une procédure de pliage d'une feuille rectangulaire en secteurs de 45° , il est surpris par la variété des figures que peuvent faire les plis sur sa feuille dépliée.

- Second degré enfin : les surprises que les surprises de l'élève réservent au pilote. Par exemple l'expérimentateur ayant plié une feuille rectangulaire en 16, et l'ayant dépliée de manière à ce qu'apparaisse le quadrillage de la feuille par les marques des plis, demande à un élève de repasser au crayon sur les plis qu'il voit. Ce dernier ne tire pas ses traits en suivant les lignes des plis, rectilignement et de bord à bord, mais entoure successivement les petits carreaux dans l'ordre qu'il les voit, comme si pour lui, les marques des plis n'étaient pas rectilignes mais cellulaires.

Il y a dans ces interactions un jeu à trois où, par la médiation du milieu, les surprises se répondent et relient les connaissances des sujets les unes aux autres. Nous ne sommes plus seulement en présence d'un soi et d'un non soi qui agissent directement l'un sur l'autre, mais d'un soi (et d'un non soi), d'un autre (et d'un non lui), d'un milieu donc, ainsi que toutes les relations qui s'instaurent entre ces divers éléments. C'est ce que j'ai dénommé interactions de connaissances (cf. 2003).

3.4 Nous voilà rendus bien loin du procédé expérimental de laboratoire, simple révélateur de compétences. Pourtant nous partageons avec ces recherches un postulat : les surprises que le milieu nous fait sont à la mesure de nos propres connaissances. Rapporté aux enseignants, il en découle ceci : pour un enseignant, le succès d'une didactique de la surprise se mesurera à l'aune de sa curiosité et de son intérêt portés conjointement aux mathématiques (ex : les symétries), aux mondes mathématisés (ex : les pliages), aux pensées mathématiques de ses élèves (ex : comment les symétries aident les élèves à penser leurs pliages) et aux relations qui lient toutes ces affaires.

3.5 Hélas, les livres ou articles qui décrivent avec précision ce qui se passe de mathématique pour un élève lorsqu'il les pratique, par exemple lorsqu'il fait du pliage géométrique, ou lorsqu'il dessine à main levée un cube en perspective cavalière, sont fort peu accessibles, ... quand ils existent. Considérez donc qu'on ne dispose même pas d'un exposé complet concernant le calcul élémentaire et les outils symboliques qui en sont les supports⁴. L'enseignant curieux sera comme le chercheur, un autodidacte. Voilà une limite drastique à ce que je puis apporter à l'enseignement avec l'idée d'une didactique orientée sur la surprise plutôt que sur la performance. Ce serait beaucoup demander aux enseignants de s'y engager, et je me garde bien de le faire. Il me suffit d'assurer cette voie⁵.

3.6 Dans cette même revue, j'ai déjà eu l'occasion de présenter quelques unes de ces idées, mon article s'intitulait : Jouer la surprise. Cette dimension du jeu est primordiale en ddm, elle a été magistralement développée dans la théorie des situations de G. Brousseau. On peut y associer les idées développées ici. Ainsi je joue un jeu avec le milieu et l'élève et je le fais afin de nous ménager des surprises, tant à moi-même – le contrôle commence par là - qu'à l'élève. Je puis préciser : c'est un jeu de provocations contrôlées de surprises. Sa pratique nous permet de rafraîchir nos savoirs

4 Mon cours propose une ébauche d'un tel exposé qui prolonge mes articles publiés dans la revue Math Ecole en 1987 et 1988.

5 Un groupe de personnes y travaille résolument, il est ouvert à qui s'y intéresse. Un cours et un séminaire de recherche sont donnés à l'université de Genève, un autre cours à l'université de Lausanne, on peut toujours s'y inscrire à titre d'auditeur.

disciplinaires et intellectuels aux sources de l'expérience (cf. A paraître).

3.7 À ce jeu, chacun interagit avec un milieu qui parfois, sans crier gare, se dérobe. Tout naturellement et avec un peu d'insouciance, nous sommes entraînés hors du modeste domaine de nos savoirs et de nos compréhensions.

4. Conclusion

4.1 Ayant ainsi cultivé la surprise en portant une attention toute particulière à l'action des signes mathématiques avec lesquels nous interagissons⁶, je puis désormais adresser aux classes une proposition. Elle devrait aider à sortir des impasses dans lesquelles la pensée didactique classique nous place chaque fois que nous avons affaire avec des élèves en échec sérieux. Il ne s'agit pas d'en faire une panacée, mais de la considérer comme un affinement de nos analyses et un enrichissement de nos moyens d'action. Il est désormais possible de distinguer quatre modes de contrôles des interactions didactiques : aller au devant du défi (apprendre), à la rencontre de la surprise (explorer), à la recherche de l'intrigue (questionner) et précéder ainsi l'intelligence (comprendre)

4.2 J'entrevois la possibilité de mettre en œuvre cette pédagogie pressentie, il y a plus de 100 ans par Ch. S. Peirce (ibid) : Dans tous les ouvrages de pédagogie que j'ai pu lire – et il y en a beaucoup, et de gros et de lourds – je n'ai pas souvenir d'avoir vu prôner de système d'enseignement qui se ferait par le recours à des plaisanteries, le plus souvent cruelles. Et pourtant c'est ce qui décrit la méthode de notre grand maître, l'Expérience.

Textes évoqués

Auckenthaler Y. 2004, Jouer la surprise, oui mais comment ? Analyses de jeux de tâches géométriques et de leurs moments de surprise. Mémoire de licence ssed, fpse, Unige.

Conne F., Favre J.-M. & Giroux J., à paraître 2006, Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage des mathématiques : le cas des interactions de connaissance dans l'enseignement spécialisé. Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers., Doudin P.-A. & Lafortune L. éd., Presses de l'Université du Québec. Chap 6., pp 118-151.

Conne F., 2004, Jouer la surprise, Educateur n° 7, juillet, p. 35-37.

Conne F., 2003, Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. in La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire. Revue virtuelle, Education et Francophonie, Schmidt S. et Maury C. éd., Volume XXXI, numéro 2.

Conne F, 1987-1988, Comptage et écriture des égalités dans les premières classes de l'enseignement primaire. Math-Ecole no 128, p. 2-12. Entre comptage et calcul. Math-Ecole. 1987, no 130, p. 11-23. Numérisation de la suite des nombres et faits numériques. Math-Ecole no 132, p. 26-31, et no 133, p. 20-23. Calculs numériques. Math Ecole no 135, p23-36.

Peirce Ch. S., 2002, Pragmatisme et pragmatisme, deuxième conférence de Harvard, 1903. (Ms 305), Cl Tiercelin & P. Thibaud éd., éd. du Cerf, 2002. pp. 295-297.

6 Les surprises sont généralement au nœud de plusieurs choses. J'ai fait maintes fois l'expérience que des surprises me mènent à d'autres surprises. Ce fait est en lui-même quelque chose de fort étonnant. Pour reprendre l'exemple du pliage de la note n°2, le support de cette surprise et de toutes les variations (explorations) que l'on peut faire à partir de là tient à une propriété physique du papier : les plis s'y propagent en segments rectilignes.