Une séquence sur la résolution d'équations du 1er degré en 4^{e}, débouchant sur un PER

En suivant la philosophie du document d'accompagnement intitulé *Du numérique au littéral*, dont les problèmes proposés dans ce qui suit sont extraits, une possibilité d'enseignement de la résolution d'une équation du 1er degré à une inconnue en 4^{e} pourrait être celle exposée dans ces lignes. Précisons que le formalisme mathématique parfois utilisé n'est pas en usage en 4^{e} ; il s'agit seulement d'indiquer une proposition d'enseignement pour le professeur, et l'usage des notations adéquates en facilite la lecture.

Dans ce qui suit, il semble nécessaire que le professeur relève par lui-même les questions cruciales par lesquelles devrait passer l'étude de ces problèmes afin de construire et d'enseigner l'organisation mathématique relative au thème des équations en 4^{e}. Ce faisant, il se constitue ***une fiche de direction de l'étude*** qui lui facilitera le travail à mener avec les élèves en classe, en notant le comportement qu'il doit suivre, les propositions qui peuvent ou non apparaître chez les élèves, etc. Il pose aussi des jalons pour la rencontre et l'étude des organisations mathématiques à venir relatives aux inéquations et aux fonctions, en 4^{e} et dans les classes de niveau supérieur, ou pour des organisations mathématiques qui relèvent du calcul algébrique élémentaire, et qui peuvent prendre place avant celle qui porte sur les équations en 4^{e}. Dans ce sens, cette proposition vise à s'insérer et à générer un Parcours d'Étude et de Recherche (PER) plus large, couvrant la majeure partie de l'enseignement de l'algèbre jusqu'à la classe de 2de incluse.

Si les élèves ne parviennent pas à poser par eux-mêmes ***les questions cruciales*** qui émergent, parce que dans la logique du développement de l'étude et des questions problématiques qui surgissent naturellement au fur et à mesure que l'étude les amène à les rencontrer, il revient au professeur de les leur soumettre. L'ensemble des questions cruciales contribue à la confection de la fiche pour le professeur afin qu'il puisse diriger l'étude dans sa classe. On indique, au fur et à mesure de l'avancée dans le texte, quel est le moment de l'étude (ou moment didactique) réalisé au sein de l'activité en cours. On les rappelle brièvement :

Groupe I (Activités d'étude et de recherche [AER])

1. Moment **de la (première) rencontre** avec le type de tâches ;
2. Moment de **l'exploration** du type de tâches et **de l'émergence de la technique** ;
3. Moment de la construction **du bloc technologico-théorique**, ou encore du savoir qui justifie, produit et rend intelligible la technique.

Groupe II (Synthèses)

4. Moment **de l'institutionnalisation**.

Groupe III (Exercices & problèmes)

5. Moment **du travail** de l'organisation mathématique (et en particulier **de la technique**).

Groupe IV (Contrôles)

6. Moment **de l'évaluation**.

Moment de la (première) rencontre avec le type de tâches et moment de l'émergence de la ou les techniques

On commence par proposer aux élèves une tâche particulière et problématique, spécimen du type de tâches plus vaste que l'on souhaite enseigner : « résoudre une équation du 1er degré à une inconnue ». Il s'agit donc du moment de (la première) rencontre avec ce type de tâches. La rencontre a peut-être déjà eu lieu les années précédentes, par exemple lorsque les élèves devaient rechercher la différence ou le quotient de deux nombres. Mais on choisit de nouveau d'organiser les conditions de ce moment et de le prolonger à travers la rencontre d'autres spécimens de tâches du même type.

Conjointement au moment de (première) rencontre qui sera répété plusieurs fois, les élèves sont engagés dans un moment d'exploration du type de tâches et d'élaboration de techniques. On leur fait en effet explorer, dans un premier temps, un certain nombre de tâches du type (par exemple, des tâches pour lesquelles il peut y avoir une solution, pas de solution, deux, voire « beaucoup » de solutions pour une équation de ce type…). Ceci les conduit à « inventer » des techniques pour les résoudre, puis à rencontrer la portée limitée des techniques utilisées ; ce qui les oblige à les évaluer et – c'est l'un des buts recherchés – à les améliorer, ou en changer. Une ou des techniques ont alors émergé pour le type de tâches « résoudre une équation du 1er degré à une inconnue » qu'il va falloir continuer d'étudier.

Pour cela, on pose aux élèves le problème suivant, suggéré dans le document d'accompagnement intitulé *Du numérique au littéral* :

On pose aux élèves le problème suivant suggéré dans le document d'accompagnement intitulé *Du numérique au littéral* :

Problème 1 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice lui ajoute 4, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 13 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ?

A(x) = (x + 4) ´ 7 et B(x) = 2x + 13 ; S = { -3}

Les élèves sont mis en groupe de quatre et on demande de noter leurs recherches après une phase d'exploration. Il y a des chances que les élèves commencent à tester des valeurs entières positives.

- Comme ils ne trouvent pas de réponse, ***il est possible qu'un élève suggère de tester avec des négatifs*** ; dans ce cas la réponse est donnée par essais / erreurs. Même si les élèves souhaitent passer à la suite, puisque le problème est résolu, le professeur propose de noter au tableau les résultats trouvés par les élèves ayant testé pour diverses valeurs du nombre choisi.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice	…	-7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand	…	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25

A ce stade, il est possible que les élèves fassent diverses remarques à partir de l'observation du tableau : sur les variations relatives de $A(x)$ et $B(x)$ *[la notation A(x), B(x) est utilisée ici par commodité de communication entre nous ; elle n'est pas à utiliser avec les élèves à ce stade*], sur le fait que $A(x)$ est constitué des multiples de 7 (ce qui n'est pas étonnant puisqu'Alice a multiplié par 7 le résultat obtenu après avoir ajouté 4 au nombre choisi). Puis on passe au problème 2 qui suit.

- ***Si les élèves n'ont pas eu l'idée de tester avec des négatifs,*** ce qui est souvent le cas, le professeur demande ***d'organiser les résultats en les rangeant*** ; par exemple en suivant les valeurs croissantes testées. On note les résultats au tableau et les élèves devraient alors constater que les valeurs trouvées sur les positifs « s'éloignent » de plus en plus. L'idée commence à germer chez les élèves que l'écart entre les valeurs de $A(x)$ et de $B(x)$ s'accroît lorsque x croît. D'où déjà chez certains, l'idée d'une régression afin que l'écart devienne de plus en plus petit. Certains élèves expliquent que comme $A(x)$ s'accroît de 7 et que $B(x)$ s'accroît de 2 lorsque x croît de 1, alors l'écart entre $A(x)$ et $B(x)$ s'accroît toujours de 5.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	0	1	2	3	…
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice	28	35	42	49	…
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand	13	15	17	19	…

- D'où l'idée de tester sur des négatifs ; ce qui permet de compléter le tableau. On trouve ainsi la solution -3.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice	…	-7	0	7	14	21	28	35	42	49
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand	…	3	5	7	9	11	13	15	17	19

D'autres remarques peuvent être faites à partir du tableau et on retrouve ce qui a été développé dans le premier tiret. On passe au problème 2.

A l'occasion de résultats différents trouvés par les élèves pour une même valeur, il est intéressant de faire écrire au tableau et sur leurs cahiers les calculs numériques conduisant à ces résultats, même si, et c'est dans la quasi-totalité des cas ce que font les élèves, les calculs sont menés avec une calculatrice par les élèves ; cela permet de faire plus facilement advenir le passage à l'écriture littérale.

Moments de l'exploration du type de tâches et de la portée de la technique (pb 2 et 3)

Problème 2 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice lui ajoute 2, puis élève le résultat au carré. Bertrand soustrait 2 au nombre affiché, élève le résultat au carré puis lui ajoute 8 fois le nombre du départ. Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ?

$A(x) = (x + 2)^2$ et $B(x) = (x – 2)^2 + 8x$; S = ¡. Le but assigné à ce problème est de faire en sorte que les élèves se persuadent de la nécessité d'une méthode pour prouver l'unicité de la solution du problème 1 ; la question de l'existence ne se pose pas puisque l'énoncé précise, dans chacun des problèmes, que Alice et Bertrand ont trouvé le même résultat (il est implicite qu'ils ne se trompent pas dans l'utilisation de leurs calculatrices). La technique que l'on a commencé à faire vivre dans le problème 1, et qui trouvera sa pleine utilisation dans le problème 3, s'appuie sur la comparaison des variations de A(x) et B(x) ; c'est-à-dire sur une utilisation en acte du théorème des valeurs intermédiaires et du procédé par dichotomie d'encadrement de la solution. Deux remarques. Il n'est évidemment pas question d'enseigner des éléments théoriques permettant d'établir ou de justifier le théorème des valeurs intermédiaires et son utilisation par dichotomie ; c'est une connaissance « en acte » que possèdent les élèves pour la majorité d'entre eux. Il est inutile de passer, et de perdre, du temps sur ce problème ; par exemple en demandant aux élèves si tout nombre est solution (cela engage dans des discussions sans fin : des élèves se trompent dans les calculs et croient trouver des nombres qui ne conviennent pas, d'autres veulent porter à la connaissance de tous les nombres qu'ils ont trouvés, etc. Il s'agit seulement de faire constater que, dans le cas de ce problème 2, plusieurs nombres répondent à la question et de se demander si cela n'aurait pas pu être le cas dans le problème 1. Si les élèves demandent si l'on peut expliquer pourquoi plusieurs solutions dans le problème 2, on peut soit leur dire que c'est précisément ce que l'on saura justifier lorsqu'on aura traiter le problème 3, soit renvoyer cette recherche dans un temps extérieur à celui de la classe, et passer au problème 3.

Parfois, pour $A(x)$ et $B(x)$, les élèves qui ont déjà été enseignés en algèbre commencent par utiliser l'écriture algébrique, après le travail sur le problème 1. D'autres continuent à tester des valeurs en suivant les programmes de calcul. Quoi qu'il en soit, qu'ils écrivent les expressions algébriques correspondant à $A(x)$ et $B(x)$ ou pas, la seule technique dont ils disposent à ce stade consiste à tester ces programmes de calcul. Ils constatent donc qu'il y a beaucoup de solutions pour le problème 2. Deux questions devraient émerger :

- Comment cela se fait-il ?
- Et pour le 1^er^ problème, comment être sûr qu'il n'y a pas d'autres solutions que l'on aurait oubliées ?

Deux possibilités du côté des élèves :

- soit ils ne proposent pas de pistes de solutions ou ils en proposent mais elles n'aboutissent pas, et alors on laisse les questions ouvertes
- soit ils proposent une écriture algébrique, et ont l'idée de développer pour vérifier si elles sont toutes deux égales, et dans ce cas on aura répondu à la première de ces deux questions. L'expérience montre que dans ce cas, les élèves butent sur le développement des identités remarquables. Cela constitue finalement une perte de temps qui, de plus, éloigne les élèves du but assigné à l'ensemble du travail : trouver une technique de résolution d'équations du 1^er^ degré à une inconnue. Ce travail peut être renvoyé à un temps hors classe, ou tout simplement, le professeur peut dire que cette question sera reprise après qu'on aura traité le problème 3.

Après s'être assuré qu'il y a « beaucoup » de solutions, les élèves sont convaincus qu'il y a une infinité de nombres qui répondent à la question (ce en quoi ils n'ont pas tort, bien qu'ils l'ignorent, puisque cela est vrai dès que ces trinômes du second degré coïncident sur trois valeurs), alors il est possible qu'ils tentent de répondre à la seconde (comment être sûr qu'il

n'y a pas d'autres solutions au 1er problème).
En étudiant le tableau du 1er problème, il y a des chances que l'on parvienne à répondre à cette question. Pour ce problème, on peut constater que lorsque les valeurs testées croissent, alors A et B croissent aussi, que $A(x)$ reste néanmoins supérieur à $B(x)$ pour les valeurs supérieures à -3, que l'écart entre $A(x)$ et $B(x)$ tend à augmenter. On peut se poser la question pour les valeurs de x inférieures à -3 (si les élèves ne l'envisagent pas, alors c'est le professeur qui le suggère), calculer quelques valeurs et s'apercevoir qu'alors $A(x)$ devient inférieur à $B(x)$ (c'est aussi l'occasion de retravailler la comparaison des négatifs) et que l'écart s'accroît dans ce cas encore pour $A(x)$ et $B(x)$. Si les élèves ne l'ont pas suggéré, le professeur peut invoquer l'intérêt de noter l'écart dans une ligne supplémentaire afin de se convaincre de sa croissance absolue. De cette petite expérimentation sort la tentation de conjecturer que $A(x)$ et $B(x)$ ne coïncideront plus pour aucune valeur différente de -3 ; ces éléments peuvent être notés au tableau après un temps de recherche individuelle des élèves ; ce qui constitue un moment d'institutionnalisation locale du fruit du travail accompli, ce résultat méritant sans doute d'être consigné. On peut remarquer qu'ainsi s'éclaire la phrase du document d'accompagnement, page 1, en haut de la colonne de gauche : « en 4e et en 3e, initiation à la résolution de problèmes par des méthodes algébriques liées souvent à l'utilisation de fonctions ».

Ce travail ayant été mené, on peut se lancer dans un des problèmes du même type, mais ayant pour solution un rationnel non décimal, comme mentionné dans le document d'accompagnement. Par exemple :

Problème 3 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice le multiplie par 11, puis ajoute 5 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 4 puis ajoute 9 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel est ce nombre ?

$A(x) = 11x + 5$ et $B(x) = 4x + 9$; $S = \{4/7\}$

Les élèves ayant été exercés sur les problèmes précédents, ils devraient parvenir sans trop de difficultés soit à écrire sous forme algébrique $A(x)$ et $B(x)$ (par exemple sous la forme $11x + 5$ et $4x + 9$), soit à utiliser directement un tableau permettant de tester diverses valeurs sans recourir à l'écriture algébrique. Puis à rechercher une solution, par essais et ajustements puisque c'est la seule technique dont ils disposent à ce stade.

Cette technique a de fortes chances de ne pas permettre d'aboutir, mais permet de nouveau de faire des calculs, de noter que A et B sont croissantes, que A est inférieure à B pour des valeurs entières négatives ou nulles – entières car il est fort probable que ce soit les seules valeurs que l'on ait l'idée de tester –, et que A est supérieure à B dans le cas contraire, etc.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice		-28	-17	-6	5	16	27	38	
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand		-3	1	5	9	13	17	21	

Ecart *A* - *B*		-25	-18	-11	-4	3	10	17	

Mais le travail accompli permet néanmoins de réaliser une grande avancée : localiser la valeur solution par un encadrement entre 0 et 1, en faisant vivre en acte un « théorème des valeurs intermédiaires »… On tente alors de « se rapprocher » de la valeur solution, dont on est sûr de l'existence dans l'intervalle]0 ; 1[. C'est alors qu'il est nécessaire d'avoir pensé aux ***questions cruciales*** par lesquelles il est fort probable que passe la classe. Si elles n'émergent pas – mais on souhaite évidemment qu'elles émergent du travail des élèves –, c'est au professeur de les poser.

Moment d'émergence d'une technique et d'évaluation de sa portée

1. Comment faire pour se rapprocher de la solution ?

Il y a des chances pour que les élèves proposent de recourir aux décimaux : 0,1 ou 0,5, ou encore 0,9 par exemple. On peut faire noter le résultat de chaque test sous une forme du type suivant :

1re possibilité

11 ´ ***0,1*** + 5 < 4 ´ ***0,1*** + 9 ; différence (écart) entre les valeurs des deux programmes de calcul : **3,3**

11 ´ ***0,5*** + 5 < 4 ´ ***0,5*** + 9 ; différence (écart) entre les valeurs des deux programmes de calcul : **0,5**

11 ´ ***0,9*** + 5 > 4 ´ ***0,9*** + 9 ; différence (écart) entre les valeurs des deux programmes de calcul : **2,3**, etc.

En continuant ainsi, on arrive sans doute jusqu'à des résultats du type :

11 ´ ***0,57*** + 5 < 4 ´ ***0,57*** + 9 ; différence (écart) entre les valeurs des deux programmes de calcul : **0,01**

11 ´ ***0,58*** + 5 > 4 ´ ***0,58*** + 9 ; différence (écart) entre les valeurs des deux programmes de calcul : **0,06**

2e possibilité

Si on utilise le tableur, on obtient successivement :

Nombres choisis par Alice et Bertrand	Résultats obtenus par Alice	Résultats obtenus par Bertrand	Ecart entre les résultats obtenus par Alice et Bertrand
0	5	9	-4
0,1	6,1	9,4	-3,3
0,2	7,2	9,8	-2,6
0,3	8,3	10,2	-1,9
0,4	9,4	10,6	-1,2
0,5	10,5	11	-0,5
0,6	11,6	11,4	0,2
0,7	12,7	11,8	0,9
0,8	13,8	12,2	1,6
0,9	14,9	12,6	2,3
1	16	13	3

Ce tableau permet de constater que l'écart entre $A(x)$ et $B(x)$ est le plus petit pour les valeurs 0,5 et 0,6 des nombres choisis par Alice et Bertrand. Ce qui conduit à affiner la recherche :

Nombres choisis par Alice et Bertrand	Résultats obtenus par Alice	Résultats obtenus par Bertrand	Ecart entre les résultats obtenus par Alice et Bertrand
0,5	10,5	11	-0,5
0,51	10,61	11,04	-0,43
0,52	10,72	11,08	-0,36
0,53	10,83	11,12	-0,29
0,54	10,94	11,16	-0,22
0,55	11,05	11,2	-0,15
0,56	11,16	11,24	-0,08
0,57	11,27	11,28	-0,01
0,58	11,38	11,32	0,06
0,59	11,49	11,36	0,13
0,6	11,6	11,4	0,2

On conclut de cette phase de recherche que l'on se rapproche de la solution, sans l'avoir atteinte pour l'instant, et qu'elle est comprise entre 0,57 et 0,58. On peut peut-être imaginer que l'on va parvenir jusqu'à la réponse exacte en continuant ainsi, mais on va rapidement s'accorder sur l'idée que ce sera très coûteux en temps. Certains élèves déclarent qu'il se pourrait même que l'écriture décimale de la solution soit illimitée, car on croit se souvenir qu'il existe des nombres de ce type rencontrés dans les classes précédentes ! En tout cas, la question mérite d'être posée et l'éventualité de sa réponse consignée au tableau et sur le cahier.

On n'a pas trouvé la réponse exacte mais on sait que son écriture décimale débute par 0,57. Il est possible que ce soit un nombre qui n'est pas décimal.

Questions cruciales
On constate que l'écart (la différence) diminue ; jusqu'à combien va-t-il diminuer ? À quoi sera égale la différence lorsqu'on aura trouvé la solution ? [Quand deux nombres sont égaux, à quoi est égale leur différence ? Et à quelle condition sur la différence sait-on quand deux nombres sont égaux ?]

Il y a de grandes chances pour que les élèves trouvent d'eux-mêmes les réponses aux deux premières questions et disent que si la différence est nulle, les nombres sont égaux, et que si les nombres sont égaux alors la différence est nulle. C'est sans doute là une définition de l'égalité de deux nombres, et qui la lie à l'écriture d'une différence. La nouveauté réside ici dans l'aspect fonctionnel de la définition adoptée : parce qu'on a un problème à résoudre, on est amené à faire le lien entre différence nulle et égalité des nombres, ce qui est rarement le cas des définitions souvent posées *a priori* par le professeur ou dans le savoir mathématique proprement dit (que l'on songe seulement à la lecture d'un ouvrage de mathématiques de niveau universitaire !)

On peut donc consigner cela au tableau et sur le cahier :

Lien entre égalité et différence
Si $a - b = 0$, alors $a = b$
Si $a = b$, alors $a - b = 0$

Le doute s'est installé quant à la pertinence de l'usage du tableur pour parvenir à trouver la solution. Dans le cas où les écritures algébriques n'ont pas été utilisées au cours de la recherche des trois problèmes, alors le professeur propose aux élèves de se substituer au tableur en examinant les formules qu'on a dû lui fournir. Ceci permet de noter que le programme de calcul pour Alice est écrit : =11 * Cellule A1+5 et pour Bertrand =4 * Cellule A1 + 9. Comment traduire cela dans le langage des mathématiques ?

On parvient ainsi à $11x + 5$ et $4x + 9$. Le problème devient :

Question cruciale
Il faut donc trouver la valeur de x que l'on ne connaît pas encore, mais qui est comprise entre 0,57 et 0,58, et pour laquelle on aura : $11x + 5 = 4x + 9$, c'est-à-dire une différence $11x + 5 - (4x + 9)$ nulle.

Résoudre cette question revient à résoudre la question cruciale qui suit :

Question cruciale
Peut-on trouver la valeur qui rend la différence nulle ?

La différence est calculée :
$11x + 5 - (4x + 9) = 11x + 5 - 4x - 9 = 7x - 4$
Remarquons que dans le cas où la « suppression des parenthèses précédées du signe – » n'a pas encore été enseignée, la recherche de l'activité conduit en ce point à sa rencontre nécessaire ; c'est-à-dire « fournit une bonne raison qui motive » que l'on s'intéresse à la réduction de certaines sommes algébriques.

La différence a en effet été calculée plus haut : c'est $7x - 4$. Notre problème revient donc à trouver la valeur de x pour laquelle $7x - 4 = 0$. D'après la définition de l'égalité de deux nombres posée plus haut ($a = b$ si et seulement si $a - b = 0$) comme réponse à la question cruciale 2, cela signifie $7x = 4$. Or, on sait depuis la classe de 6e que cette dernière égalité désigne une autre forme du nombre $\frac{4}{7}$. Donc $x = \frac{4}{7}$, ce qu'on vérifie par le calcul de $A(\frac{4}{7})$ et $B(\frac{4}{7})$.

Les moments didactiques rencontrés au cours de la recherche et de l'étude des questions cruciales 2 et 3 relèvent à la fois de l'émergence de la technique et de la construction du bloc technologico-théorique, c'est-à-dire du savoir mathématique qui permet de la produire de façon raisonnée, de la justifier depuis les mathématiques.

Mais une nouvelle question surgit :

Question cruciale **Peut-on être sûr que la valeur trouvée est la bonne ? Que c'est la seule ?**

Il y a des chances que les élèves soient désormais convaincus de l'unicité de la solution ; ce qui règle le problème. Si toutefois des élèves mettent en doute cette réponse, alors il faudra s'accorder sur la nécessité d'être certain que :

si $x < \frac{4}{7}$ alors $11x + 5 < 4x + 9$

si $x > \frac{4}{7}$ alors $11x + 5 > 4x + 9$

et que l'égalité n'aura alors lieu que si $x = \frac{4}{7}$.

Ce qui permet d'aborder le raisonnement par disjonction de cas. Un tel travail engage aussi à se poser des questions quant aux inéquations, aux variations des fonctions (affines dans ce cas). Il débouche ainsi sur un PER de plus grande ampleur que l'on poursuivre en 3^e^.

On note finalement sur la cahier que :

Trouver la valeur de x qui rend l'égalité $11x + 5 = 4x + 9$ vraie (on dit que l'on résout l'équation), revient à trouver la valeur de x pour laquelle la différence $11x + 5 - (4x + 9)$ est nulle, soit $7x - 4 = 0$.
On présente ainsi les calculs :

$$11x + 5 = 4x + 9$$
$$11x + 5 - (4x + 9) = 0$$
$$11x + 5 - 4x - 9 = 0$$
$$7x - 4 = 0$$
$$7x = 4$$
$$x = \frac{4}{7}$$

Ce qui est, bien évidemment, la notation d'une technique pour résoudre un certain type d'équations, ainsi que sa justification technologique.

On peut remarquer qu'en suivant la voie indiquée dans ces pages, on n'a pas encore rencontré, ni à plus forte raison fait travailler, la technique classique dite de « transposition des termes d'un membre à l'autre de l'équation ».
Le temps du travail de l'organisation mathématique, et dans ce cas le travail de la technique de résolution d'équations qui vient d'être institutionnalisée, permet de rencontrer cette technique parmi d'autres. Il suffit pour cela, à l'usage et grâce au travail d'exercices, de remarquer que réduire l'expression obtenue dans le membre de gauche de la troisième équation revient à calculer deux différences qui pouvaient aussi bien être calculées en « regroupant les x dans un membre et les constantes dans l'autre » ; c'est ce qu'indique l'avant-dernière équation. Cette remarque permet d'affiner la technique dans le sens d'une plus grande économie d'écritures. La justification, pour cette manière de faire, est encore à

rechercher dans l'utilisation judicieuse d'une définition : celle de la différence de deux nombres écrite sous forme d'égalité.

Ainsi l'écriture $11x + 5 = 4x + 9$ signifie-t-elle aussi que 9 est la différence de $11x + 5$ et de $4x$; ce qui s'écrit : $11x + 5 - 4x = 9$ ou encore $5 + (11x - 4x) = 9$. Cette dernière expression indique que $(11x - 4x)$, qui est le nombre à ajouter à 5 pour obtenir 9, est la différence $9 - 5$; ce qui s'écrit $11x - 4x = 9 - 5$.

Cette technique étant installée, il est évidemment de nouveau nécessaire de la travailler, puis de l'adapter au cas plus complexe d'équations du type $\frac{ax+b}{c} + \frac{dx+e}{f} = \frac{gx+h}{k}$, par exemple.

Il est temps de travailler l'organisation mathématique que l'on vient de construire, d'évaluer le rapport qu'on a établi avec elle. L'observation des élèves montre que, parvenant à mettre le problème en équation, certains d'entre eux restent encore à ce stade à la détermination d'une solution par essais-erreurs, encadrements successifs. Autrement dit qu'un des buts du travail mené leur a en partie échappé : déterminer une technique algébrique fiable pour la résolution de ce type d'équations. Il s'agit donc de donner aux élèves une nouvelle occasion de rencontrer le problème que la résolution d'équations permet de régler, tout en faisant travailler la technique. D'autres remarques peuvent être encore faites. Par exemple, étant parvenus à mettre le problème en équation, puis à écrire que la différence doit être nulle, les élèves réduisent l'expression algébrique mais n'écrivent plus l'égalité, puis se retrouvent avec une expression algébrique dont ils ne savent que faire. On pose donc de nouveau un problème du type « Alice et Bertrand ».

Problème 4 : Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice le multiplie par 9, puis ajoute 2 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 5 au résultat et enfin multiplie par 3 le résultat trouvé. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel est ce nombre ?

$9x + 2 = (2x + 5) \times 3$ $S = \{\frac{13}{3}\}$

Lors de l'exposé de la résolution de cette équation ou bien de celles qui suivront, recherchées en classe ou en travail hors classe, il est fréquent que des élèves proposent d'ajouter le même nombre aux deux membres de l'équation, ou encore de transposer afin d'isoler l'inconnue dans un membre et les constantes dans l'autre. C'est en effet une connaissance devenue « culturelle » dans la mesure où la quasi-totalité d'une classe d'âge a désormais fréquenté le Collège ; elle est diffusée par divers canaux auprès des élèves (parents, camarades des autres classes).

La question qui doit alors être mise en débat est la suivante : « Qui gagne-t-on en ce qui concerne la technique de résolution et est-elle valide, qu'est-ce qui la justifie ? »

Bien que cette technique et la propriété qui la justifient ne figurent pas au programme du Collège, on peut les faire vivre en classe à partir des connaissances établies au cours du travail d'étude précédent.
Si on reprend la résolution du problème 4, « « l'intrusion » de la technique par substitution

peut advenir de manière différente :

- soit dans $9x + 2 = 6x + 15$ en proposant d'ajouter, éventuellement en décomposant les étapes de ces sommes $-6x - 2$ aux deux membres de l'équation,
- soit en transformant $9x + 2 = 6x + 15$ en $9x - 6x = 15 - 2$

La deuxième technique est aisée à justifier, et donc à faire justifier, en utilisant la technique étudiée en classe et sa justification. On a en effet écrit :

$9x + 2 - (6x + 15) = 0$

$9x + 2 - 6x - 15 = 0$

$9x - 6x - 15 + 2 = 0$

$(9x - 6x) - (15 - 2) = 0$

Ce qui prouve que $9x - 6x = 15 - 2$.

On a alors justifié que l'on peut transposer un terme d'un membre à l'autre de l'équation en changeant son signe. Néanmoins, chez certains élèves, cette technique se confond avec celle de la division ; les professeurs peuvent donc choisir son enseignement à ce moment de l'apprentissage en ayant évalué les risques induits chez les élèves.

La deuxième technique se justifie sans recourir à la métaphore de la balance Roberval dont chacun mesure les limites didactiques : méconnaissance de cette balance qui n'est plus en usage depuis deux générations au moins au profit des balances électroniques, utilisation de « masses négatives », recours à une métaphore pour justifier une propriété mathématique alors que cette justification peut être apportée depuis les mathématiques elles-mêmes. Et ceci sans tenir compte des limites de la métaphore inopérante lorsqu'il faudra multiplier les deux membres de l'équation par un même nombre non entier.

Ainsi :

$a = b \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a - b + c - c = 0 \Leftrightarrow a + c - b - c = 0 \Leftrightarrow (a + c) - (b + c) = 0$
$\Leftrightarrow a + c = b + c$

Un raisonnement analogue permet d'établir la propriété pour le produit. Ainsi :

$a = b \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow (a - b) \times c = 0 \Leftrightarrow a \times c - b \times c = 0 \Leftrightarrow a \times c = b \times c.$

La connaissance de ces deux techniques n'est évidemment pas nécessaire pour résoudre les équations au programme du Collège, y compris les équations dans lesquelles on travaille sur des fractions. Il suffit d'écrire des fractions de même dénominateur afin de les ajouter et soustraire, puis d'obtenir une fraction nulle ce qui équivaut à son numérateur nul. De même, le passage de $ax = b$ à $x = \frac{b}{a}$ se justifie à l'aide de la définition du quotient, étudiée en 6^{e}. Ces deux propriétés $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ et $a = b \Leftrightarrow a \times c = b \times c$ n'apparaissent pas au niveau du Collège d'une grande utilité pour la résolution d'équations. Par contre ces propriétés semblent au programme pour les inégalités. C'est donc l'occasion de se poser la question de leur extension à l'égalité lorsqu'on les rencontre pour l'inégalité.