Un P.E.R. sur la similitude qui débute par le théorème de Thalès au cycle 4

Institut Français de l'Éducation

4 mars 2016

Table des matières

1 Cadre général et motivation des choix didactiques

1.1 Considérations générales autour des programmes

Les nouveaux programmes entrant en vigueur à la rentrée 2016 lient systématiquement le théorème de Thalès à d'autres notions clés, comme il en est dans les repères de progressivité du thème B – Organisation et gestion de données, fonctions :

> En 3ème, les élèves sont en mesure de faire le lien entre proportionnalité, fonctions linéaires, théorème de Thalès et homothéties et peuvent choisir le mode de représentation le mieux adapté à la résolution d'un problème.

ou encore dans les mêmes repères de progressivité du thème C – Grandeurs et mesures :

> L'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les grandeurs géométriques est travaillé en 3ème, en lien avec la proportionnalité, les fonctions linéaires et le théorème de Thalès.

dans l'introduction du thème D – Espace et géométrie :

> Les définitions et propriétés déjà vues au cycle 3 ainsi que les nouvelles propriétés introduites au cycle 4 (relations entre angles et parallélisme, somme des angles d'un triangle, inégalité triangulaire, caractérisation de la médiatrice, théorèmes de Thalès et de Pythagore) fournissent un éventail d'outils nourrissant la mise en œuvre d'un raisonnement. Les transformations font l'objet d'une première approche, consistant à observer leur effet sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie.

au cœur des attendus de ce même thème D « Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer » ainsi que dans les applications possibles :

> Théorème de Thalès et réciproque. Étudier comment les notions de la géométrie plane ont permis de déterminer des distances astronomiques (estimation du rayon de la Terre par Ératosthène, distance de la Terre à la Lune par Lalande et La Caille, etc.).

ainsi que dans ses repères de progressivité :

> Le théorème de Thalès est introduit en 3ème, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie, mais aussi les agrandissements et réductions.
> La symétrie axiale a été introduite au cycle 3. La symétrie centrale est travaillée dès le début du cycle 4, en liaison avec le parallélogramme. Les translations, puis les rotations sont introduites en milieu de cycle, en liaison avec l'analyse ou la construction des frises, pavages et rosaces, mais sans définition formalisée en tant qu'applications ponctuelles. Une fois ces notions consolidées, les homothéties sont amenées en 3ème, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques.

Il est enfin question du théorème de Thalès dans les « croisements entre enseignements » au sujet des enseignements pratiques interdisciplinaires dans le thème « Langues et cultures de l'Antiquité » :

> **Questions de sciences dans l'Antiquité.**
> Mesure de la circonférence de la Terre par Ératosthène ; racines carrées ; Thalès, Pythagore ; fractions égyptiennes ; différents systèmes et formes de numération.

Faire précéder le chapitre sur le « théorème de Thalès » par celui de la « droite des milieux » est l'ordre usuellement choisi par les manuels pour aborder ces deux leçons et c'est un usage également très fréquent chez les enseignants.

Le choix de cette progression ne trouve son origine que dans une transposition didactique s'appuyant sur l'idée qu'il est plus facile d'étudier d'abord le particulier pour arriver ensuite au général. Ainsi, dans le cas du théorème de Thalès, une assez bonne familiarité des élèves avec la notion de milieu d'un segment engage à étudier d'abord le cas particulier de la droite des milieux des côtés d'un triangle. Du point de vue de l'enseignant, ce choix est renforcé par le fait que cette propriété fournit une occasion de démonstration à la portée des élèves, en utilisant les connaissances enseignées précédemment sur la symétrie centrale et le parallélogramme. Il en est de même pour la réciproque de cette propriété. C'est seulement après que ces deux propriétés ont été correctement démontrées, qu'on présente le théorème de Thalès comme une généralisation de la propriété dite des milieux ; on peut alors en démontrer quelques cas particuliers : $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, etc. pour le rapport. Enfin, on présente des applications de la propriété de Thalès sur quelques exercices de calcul de distances inaccessibles.

On voit assez bien comment les raisons qui motivent l'étude de ces propriétés ne sont pas transparentes pour l'élève puisqu'il n'a l'occasion de les rencontrer que lors des derniers exercices d'application du chapitre. Certains élèves saisiront peut-être alors l'occasion d'une première rencontre avec le problème et feront pour eux-mêmes le parcours d'étude à l'envers … Beaucoup d'autres, nous en sommes convaincus, considéreront une fois de plus que « les maths, on les fait parce qu'on nous dit de les faire » ou on y renonce …

Le bagage mathématique traditionnel qui permettait autrefois d'établir le théorème de Thalès dans le cas d'un rapport rationnel s'appuie sur les cas d'égalité des triangles ; par exemple sur le résultat suivant : *Un triangle est parfaitement déterminé par la donnée d'un côté et de deux angles.* Si un travail à ce sujet a été réalisé en début de cycle 4, les élèves parviendront à se convaincre de la véracité de l'énoncé ci-dessus.

1.2 Une brève analyse

Nous sommes tout d'abord partis à la recherche de raisons qui pourraient motiver que l'on s'intéresse, tant de l'intérieur des mathématiques que du point de vue d'élèves de 3$^{\text{ème}}$, à l'étude du théorème de Thalès « dans les triangles ».

On peut voir ce théorème comme se rapportant, dans des cas particuliers, à des problèmes « d'agrandissements et réductions » comme l'écrit le programme du cycle 4, quoique la rencontre avec de tels problèmes ait eu lieu bien avant ; sans doute dès l'école primaire, en tout cas dès l'étude du thème des échelles au cycle 3. Au-delà de ce que le programme appelle « agrandissements et réductions », formulation porteuse de confusion si les élèves ne l'associent qu'aux grandeurs longueur, aire et volume en oubliant la conservation des angles, se trouve la notion de similitude. Il y a équivalence entre « agrandissements-réductions » des longueurs et similitude dans le cas des triangles ; ce résultat étant faux dans le cas des autres polygones. À ce propos, D. Hilbert note, dans *Les fondements de la géométrie*, que le théorème de Thalès est le « théorème fondamental de la similitude ».

Le problème didactique posé peut donc devenir celui de l'organisation de la rencontre des élèves avec le concept de similitude, de telle manière que l'étude du théorème de Thalès soit vécue dans le travail de la classe comme une nécessité pour répondre à une ou des questions relevant de la similitude des triangles. Partir ainsi d'une question générant davantage de mathématiques que celles issues du seul théorème induit deux conséquences didactiques. L'ordre de la progression traditionnelle – d'abord la droite des milieux, ensuite le théorème de Thalès – est inversé. On rencontre d'abord la notion de triangles semblables, au cours de laquelle on étudie expérimentalement les relations entre longueurs des côtés. On réduit la propriété observée à l'énoncé de la propriété de Thalès en conformité avec le programme. C'est l'occasion de rencontrer « en acte » la notion d'homothétie ; dans ce cas, de centre un des sommets du triangle et de rapport positif qui peut être supérieur ou inférieur à 1. Dans le cas d'une seule configuration, on montre que les coefficients d'agrandissement et de réduction sont inverses l'un de l'autre.

Le travail mené tout au long de cette première partie est de nature essentiellement expérimentale, même si l'expérimentation s'appuie en mathématiques sur des connaissances que l'on peut qualifier de théoriques (définitions, propriétés, théorèmes, ...). La question qui se pose est alors celle d'établir par la démonstration la preuve mathématique des résultats obtenus expérimentalement, l'idée de cette preuve étant guidée par l'expérimentation, notamment par la perception de la figure.

Cette preuve s'appuie sur la démonstration classique du théorème dit « des parallèles équidistantes » qui repose sur les cas d'égalité des triangles. Le fait de s'appuyer sur des savoirs antérieurs renforce l'idée d'une cohérence des mathématiques enseignées ainsi que la nécessité d'un enseignement sous forme de parcours. Le théorème des parallèles équidistantes permet de démontrer le théorème de Thalès pour certaines valeurs particulières du rapport, voire si on le souhaitait, pour tout rapport rationnel positif.

Partir de l'expérimentation et de l'établissement d'une propriété dans quelques cas particuliers est une manière de faire courante en mathématiques (*cf.* Perrin D., 2007, L'expérimentation en mathématiques, Petit *x* 73, 6-34).

Dans la classe de mathématiques, le professeur peut attester de la validité d'un savoir non démontré ; on dira donc que l'on admet le théorème pour toute valeur du rapport (rationnel ou irrationnel).

Il existe plusieurs démonstrations de la réciproque du théorème de Thalès : par les aires, par l'absurde, par la loi des sinus, par le troisième cas de similitude des triangles (qui énonce que si les côtés sont respectivement proportionnels, alors les triangles sont semblables), en généralisant le théorème de la droite des milieux dans un triangle, etc. Nous écartons de nos choix la démonstration par les aires proche de celle des *Éléments d'Euclide* car s'appuyant sur un découpage « artificiel » de la figure prototypique et sur l'établissement d'un rapport de longueurs à partir d'un rapport d'aires. Nous ne retenons pas non plus les démonstrations par la loi des sinus et le troisième cas de similitude car ne correspondant pas au programme, bien que le troisième cas de similitude puisse être démontré en s'appuyant sur l'égalité de triangles. Notre choix portera donc sur la possibilité d'utiliser un raisonnement par l'absurde.

La question permettant d'engendrer l'étude du théorème de Thalès est relative à une notion mathématique de plus grande ampleur – la similitude –, elle a ainsi un fort pouvoir générateur d'étude. En effet, elle sera travaillée à l'occasion de l'étude de différents thèmes : les « agrandissements-réductions », l'homothétie, la proportionnalité, les fonctions linéaires et la trigonométrie dans le triangle rectangle.

1.3 Nos propositions

Le travail proposé se déroule en deux phases distinctes : une phase expérimentale qui permet aux élèves de découvrir par la manipulation certaines des propriétés visées par l'étude, et une autre, déductive, au sein de laquelle ces propriétés sont établies par la démonstration.
La question initiale, posée aux élèves, porte sur l'étude des triangles en fonction de leurs angles : Que peut-on dire de deux triangles ayant un, deux ou trois angles communs ? Des triangles de ce type ayant été construits par les élèves, il s'agit ensuite de les observer et les « comparer » ; autrement dit d'évaluer leur degré de… similitude. Pour cela, et afin de les « transporter », l'utilisation du papier calque est nécessaire.
Nous donnons ci-dessous les grandes lignes des organisations mathématique et didactique que nous avons conçues et qui ont été testées dans des classes depuis plusieurs années. En effet, même si certaines modifications sont proposées dans ce texte en raison du changement de programme, de nombreux points restent inchangés. Cette présentation intègre les éléments d'analyse a posteriori qui nous ont conduits à modifier quelques-unes de ses parties.
Si l'on demande à quoi sert le théorème de Thalès, il est fort probable que la réponse donnée par les élèves ayant vécu cette situation évoque la détermination de longueurs de segments, ceux des côtés d'un triangle, qui étaient hors de portée d'une mesure, et que cela correspond à un cas particulier de triangles semblables. Une autre dimension propre à ce PER est d'amener les élèves à saisir en partie la puissance du modèle mathématique tout en le confrontant à l'expérience : le modèle donne les longueurs des côtés d'un « grand » triangle. C'est alors le modèle qui prédit comment doit être la réalité ! Des exercices à la maison, relatifs aux distances inaccessibles, trouvent alors leur sens ; de même que les mathématiques utiles à leur calcul.

2 La proposition de direction du PER

Dans la présentation qui suit, les commentaires destinés à l'enseignant sont en caractères différents -comme ceux-ci- et en retrait.

Titre du chapitre : Des triangles…

On n'annonce évidemment pas le théorème de Thalès ou la droite des milieux afin que les élèves ne se précipitent pas sur des résultats dans les manuels, en cours particulier ou autre.

2.1 Phase expérimentale

2.1.1 Première étape

P devra avoir prévu une feuille de papier calque format A4 par élève, ou mieux, du transparent et des feutres effaçables. Il est important d'avoir un format au moins A4, et que P n'incite pas les élèves à économiser le papier, par exemple en plaçant les dessins dans telle partie du papier : ainsi, dans les groupes, les élèves, selon leurs habitudes, dessineront des *triangles de tailles différentes, ce qui favorisera l'émergence de la notion « d'agrandissement/réduction ». Si le format du papier est petit, tous les triangles auront des côtés dont les longueurs auront des mesures du même ordre de grandeur et les relations de proportionnalité entre celles-ci apparaîtront plus difficilement.*

La question visée à la classe :

Qu'obtient-on quand on construit des triangles vérifiant des conditions sur leurs angles ?

1 Quand on fixe un angle :
Sur la feuille de papier calque distribuée, chacun de vous trace un triangle dont un angle mesure $\widehat{A} = 43°$.

Que pouvez-vous dire des triangles obtenus ?

Il faut s'attendre à des difficultés de construction des angles, en particulier l'angle de $\widehat{A} = 43°$ pourra être confondu avec celui de $\widehat{A} = 37°$, ils pourront « l'arrondir » à $\widehat{A} = 40°$, ou le confondre avec son supplémentaire : la technique d'utilisation du rapporteur n'est pas encore acquise, les garde-fous que sont les notions d'angles aigus, obtus ne fonctionnent pas encore, ce PER fournira des occasions aux élèves de revisiter leurs connaissances antérieures dans le domaine des angles.

P laisse peu de temps aux groupes pour chercher, les élèves ne trouvent rien de particulier à dire, ils ont raison : les triangles qui ont un même angle ne montrent pas de particularité intéressante.

2 Quand on fixe deux angles :
Sur la même feuille de papier calque, construisez chacun un triangle ABC tel que $\widehat{A} = 43°$ et $\widehat{B} = 115°$. (Vous pouvez effacer le premier triangle que vous avez fait).

Que pouvez-vous dire des triangles obtenus ?

Dans cette partie de l'activité, les difficultés de construction d'angles continueront d'apparaître, en particulier ici pour l'angle de 115°.

Utiliser le verbe « construire » plutôt que « tracer » favorise l'émergence d'un milieu pour des propriétés géométriques. Les élèves demanderont qu'on leur donne une longueur, P répondra qu'ils peuvent choisir celle qu'ils veulent.

Observations de classes :

- Des élèves prennent l'initiative de retourner le calque, d'autres pas ; mais dans ce cas, leurs camarades leur disent de le retourner en allant même jusqu'à se moquer d'eux...
- L'idée de parallélisme et celle de proportionnalité des longueurs apparaissent dans certains groupes, pour certains élèves ; certains d'entre eux « voient » qu'il y a un agrandissement ou une réduction (« des triangles sont plus ou moins grands par rapport à d'autres »), mais des « raisonnements additifs » subsistent, bien qu'ils disent qu'ils ont « la même forme ». Dès que cela apparaît, il ne faut pas prolonger davantage le temps de recherche pour le reste de la classe car ce temps ne permet pas l'émergence de ces propriétés pour les autres élèves.

- Apparaît parfois une vision « homothétie » chez des élèves qui suggèrent pour centre le centre du cercle circonscrit. C'est sans doute en s'appuyant sur une « vision culturelle » que des élèves utilisent la métaphore (toile d'araignée, poupées russes, boîte de diverses dimensions, etc.)

Quelques remarques :

- Il ne faut pas dissocier « construire un triangle vérifiant une ou deux conditions sur les angles » avec la recherche de similitudes entre ces triangles. Si on construit des triangles vérifiant des conditions, c'est pour trouver les rapports que l'on peut établir entre eux... Du coup, il vaut mieux commencer par dire que l'on veut « déterminer les similitudes » des triangles qui vérifient entre eux des conditions : premier cas : un angle égal à $\widehat{A} = 43°$; second cas : un angle de $\widehat{A} = 43°$ et un de $\widehat{B} = 115°$.
- Il faut préciser que l'on compare l'ensemble des triangles (et non deux à deux) car les « propriétés » apparaissent de manière plus visible lorsqu'on superpose 4 ou 5 calques (parallélisme et proportionnalité).
- Certains élèves dessinent des triangles qui sont « quasiment isométriques » ; cela tient sans doute à une occupation « culturellement standard » de la feuille de calque. Pour éviter cela, on peut dans ce sens distribuer des feuilles de dimensions différentes.

Dès lors que l'on demande une comparaison à l'aide du papier calque, on pratique une géométrie « du papier calque » permettant de rencontrer « en acte » des isométries planes, et qui est donc différente de celle de la feuille de papier non découpée. On se contente d'une vision « naturelle » : deux figures superposables sont « les mêmes », on peut retourner le papier calque (on rencontrera les effets d'un retournement du papier calque au cours de ce travail).
Quoi qu'il en soit, très vite apparaît l'idée que deux angles donnés c'est comme trois, car le troisième est fixé par la propriété de la somme des angles d'un triangle, propriété bien connue des élèves. Cela permet même à certains d'entre eux de trouver que leur angle « de 115° » est faux, puisque le troisième angle qui devrait mesurer 22° d'après le calcul est autre. Il y a là, passage de la construction (domaine expérimental) à la géométrie déductive.
La configuration de Thalès devrait facilement apparaître dans l'expérience de comparaison des triangles par superposition des calques. Dès qu'elle apparaît dans quelques groupes, il faut interrompre le travail pour une mise en commun, et donner la parole à ceux qui l'ont trouvée (ce sont d'ailleurs eux qui veulent parler, car la découverte est saisissante) ; ceux qui ne l'avaient pas obtenue la recherchent alors, la trouvent facilement et l'explorent à partir des trois sommets (ils tentent de superposer successivement les trois angles, un à un).
Si les constructions sont mal faites, les parallèles n'apparaîtront pas dans certains groupes, ce qui n'est pas grave si un groupe au moins les a mises en évidence. Après la mise en commun, les élèves vérifient de nouveau leurs angles car ils aimeraient bien avoir les parallèles ; s'ils ne le font pas, P les y incite.
Si la configuration n'apparaît pas, passer au « défi » (*cf.* plus loin dans le texte), sans la conjecture**, après l'institutionnalisation menée par le professeur qui sollicite les élèves afin de dé-

gager l'essentiel des résultats obtenus, et qui prend la forme suivante notée dans le cahier.

> **Propriété :**
> La somme des angles d'un triangle est 180°.

Nous en déduisons la mesure du troisième angle : $180° - (43° + 115°) = 22°$
Cela nous permet, par exemple, de vérifier qu'on a bien construit les deux angles donnés

> **Propriété :**
> Si on connaît deux angles dans un triangle le troisième est déterminé.

> **Définition :**
> Deux triangles qui ont les mêmes angles sont appelés triangles semblables.

> **Conjecture :
> Lorsque des triangles sont semblables, il semble que si on les superpose en faisant coïncider un angle (sommet et support des côtés, quitte à retourner le calque), les troisièmes côtés des triangles sont parallèles.

Cette première étape se termine par la donnée d'un travail extérieur à la classe :
Énoncé du travail à la maison :
Trace un triangle ABC de ton choix et construis un triangle AEF, semblable au triangle ABC et tel que les côtés $[AE]$ et $[AB]$ aient pour support la même demi-droite, ainsi que les côtés $[AF]$ et $[AC]$.
Démontre que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

P relève les calques sur lesquels chacun aura écrit son nom et les distribue à la prochaine séance car ils sont nécessaires pour la suite. Il corrige les angles faux.

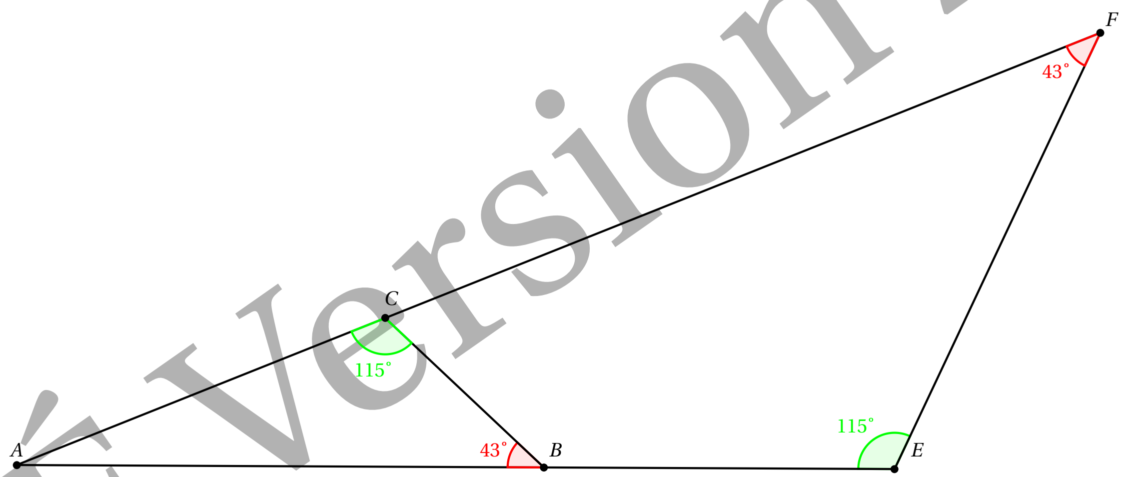
2.1.2 Deuxième étape

P apporte une feuille de calque par élève, de la même dimension que la feuille précédente.

Le travail donné à la maison est corrigé. Avoir engagé les élèves dans ce dernier travail permet de faire vivre un certain nombre de questions qui font partie d'une culture mathématique à transmettre, et qui se vit plus facilement qu'elle s'énonce. Ce « résultat » avait été établi dans le cadre d'une géométrie expérimentale : était-il prévisible, explicable, déductible du point de vue de la géométrie théorique dont on dispose ? Les droites sont-elles parallèles dans le cadre de cette géométrie ?
Pour expliciter notre propos, citons Chevallard Y. et Jullien M. 1991 :

[Q]uelque savante qu'ait été son organisation, la géométrie n'a jamais cessé de jouer le rôle de technologie de l'espace, de théorie de la maîtrise pratique de l'espace. Il s'agit-là d'une fonction sociale attestée dès la plus haute antiquité et dont même la tradition savante nous a rapporté l'existence à travers quelques épisodes mémorables - Thalès et les pyramides ou, plus près de nous, Archimède et ses "méchaniques" . (...) Toute représentation graphique est ainsi un moment, une forme déterminée (et variable), d'une modélisation de l'espace, moyen de production de connaissances que commande le savoir géométrique et qui commande l'action sur le sensible. C'est à cette notion que l'on devra tenter de rapporter ce que tout enseignement de la géométrie, quel qu'il soit, propose. [1]

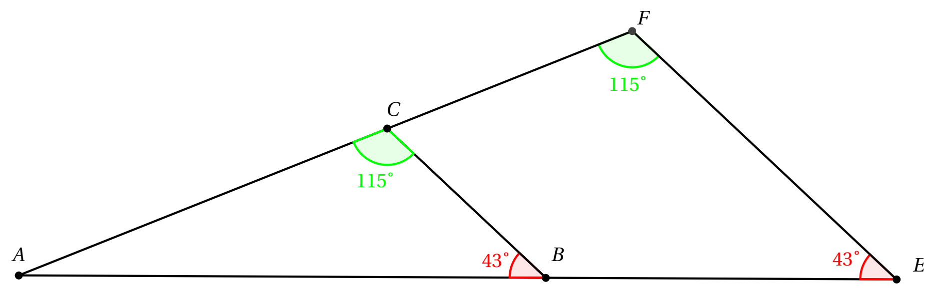
De fait, certains élèves se sont peut-être aperçus que l'énoncé du problème méritait une légère retouche si l'on souhaite obtenir un résultat valide dans le cadre de la géométrie théorique : il est nécessaire de préciser auquel des deux angles $\widehat{B}$ ou $\widehat{C}$ est égal chacun des angles $\widehat{E}$ et $\widehat{F}$ car, sinon, le parallélisme de (CB) et (EF) n'est pas garanti. C'est l'expérience qui a parlé, en construisant au moins une figure qui vérifiait l'énoncé du problème, mais pas sa conclusion. De fait, on ne pouvait utiliser dans un tel cas le résultat théorique qui énonce que, si les angles correspondants sont égaux, alors les droites sont parallèles.



Si ce constat n'apparaît pas, du fait de la « transparence » entre similitudes directe et inverse évoquée plus haut, c'est alors au professeur de faire rencontrer aux élèves l'insuffisance des hypothèses du problème posé. Le nouveau travail qui vient d'être mené aboutit à l'institutionnalisation du résultat suivant :

Propriété :
ABC et AEF étant deux triangles semblables avec $E \in [AB]$ et $\widehat{E} = \widehat{B}$, $F \in [AC]$ et $\widehat{F} = \widehat{C}$, alors les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

1. Chevallard Y., Jullien M. (1991), Autour de l'enseignement de la géométrie au collège, Première partie, Petit x, 27, pp. 41-76



Une nouvelle question émerge alors, qui peut être amenée par des élèves car une certaine culture mathématique a commencé à s'installer, ou qui est posée par le professeur si ce n'est le cas : celle de la réciproque de la propriété qui vient d'être énoncée. En poursuivant le même objectif d'une continuité de l'étude entre les divers lieux et temps qui la voient se dérouler, le travail de recherche de la validité de la réciproque peut être mené à la maison, et guidé par un énoncé élaboré collectivement en classe.
« Soient un triangle EFG et une droite parallèle à (FG) qui coupe [EF] en P, et [EG] en R. Peut-on affirmer que les triangles EFG et EPR sont semblables ? Prouvez votre réponse. »

> *Il est important d'avoir donné ce travail avant la découverte de la proportionnalité des longueurs des côtés, sinon les élèves tenteront de se servir de cette propriété puisque c'est la dernière et qu'elle est forte. Ils confondront alors propriété et réciproque et n'auront pas eu l'occasion d'aller rechercher dans leurs connaissances de cinquième sur les angles et parallèles. Une confusion fréquente - soulignée par Y. Chevallard dans son séminaire pour les PLC2 - entre la définition des angles correspondants et les deux propriétés réciproques qui les associent au parallélisme, a toutes les chances d'apparaître ici : il faudra prendre le temps d'y travailler. Le travail à la maison qui suivra fera travailler la propriété réciproque.*

P annonce : « Vous avez trouvé beaucoup de triangles semblables. Je vous mets au **défi** de construire un triangle semblable aux autres, le plus grand possible, sur un calque de la même dimension. Vous avez exactement 10 minutes. Celui qui gagne aura deux points de plus, le second un point de plus. C'est un travail individuel. Je vous rends vos calques de la dernière fois (P aura corrigé les triangles faux) et je vous distribue un autre calque de la même dimension. Écrivez votre nom sur ce calque et numérotez-le n° 2. ».
Il s'agit de faire apparaître en « en acte » une homothétie de centre un des sommets du triangle et de rapport supérieur à 1.

> *Quelques indications à partir de ce qui a pu être constaté :*
>
> - *Le démarrage peut être long pour certains, mais les regards sur le travail des autres finissent par porter en donnant des idées…*
> - *Les élèves choisissent une mesure d'un côté et tentent de construire un triangle avec les angles donnés, sans se servir de la configuration. Ça « marche » ou non ; ils doivent recommencer si c'est trop grand, mais ils utilisent la configuration si c'est trop petit, puis des allers-retours entre plus grand, plus petit. Ils placent ensuite le triangle du mieux possible sur le calque afin de l'agrandir encore.*

- *Les élèves commencent à partir de leur triangle précédent, puis ils utilisent la configuration de Thalès pour agrandir leur triangle ; si cela « déborde » , ils rapetissent et continuent comme ci-dessus.*
- *Si le triangle n'est pas assez grand, ils l'effacent et recommencent ailleurs sur le calque.*
- *À partir d'un triangle jugé trop petit, on recourt à la configuration de Thalès en utilisant successivement les trois côtés : c'est la stratégie gagnante, associée avec un changement d'orientation éventuel pour disposer de davantage d'espace.*
- *La question « qu'est-ce que c'est qu'agrandir ? » devrait être posée par les élèves, et faire apparaître que les trois côtés « grandissent ensemble ». Elle ne sera peut-être pas formulée, mais elle revivra lors de la troisième séance, et devra alors prendre corps.*
- *Certains commencent par prendre la diagonale de la feuille format A4 comme côté : avec les angles choisis, on n'obtient pas directement le plus grand triangle possible. Si P distribue des calques d'une autre dimension, il devra choisir dès le début du PER des angles adaptés, de façon à ce que la méthode gagnante nécessite la configuration de Thalès.*

Au bout des 10 minutes, dans chaque groupe, les élèves sélectionnent le plus grand des trois ou quatre triangles ; en même temps ils vérifient évidemment la similitude de ces triangles. Puis, collectivement, on sélectionne le plus grand triangle parmi ceux fournis par chacun des groupes. Pour le second triangle répondant au problème, on prend parmi ceux qui ont été sélectionnés par les groupes, puis on vérifie si besoin avec les triangles restant dans les groupes.

- *La configuration devrait facilement s'imposer pour la comparaison et apparaître à ceux qui ne l'auront pas encore rencontrée.*
- *Lors de la comparaison à l'intérieur des groupes, certains triangles seront éliminés car les angles ne seront pas toujours justes : cela pourra être remarqué soit directement, lorsque les angles qui ont été superposés ne coïncident pas, soit indirectement, lorsque les angles choisis pour la superposition coïncident mais que les troisièmes côtés ne sont pas parallèles. On peut compter sur l'honnêteté et l'intransigeance des élèves lorsqu'il s'agit de trouver un vainqueur dans un défi !*
- *Toujours à l'intérieur des groupes, certains trouveront que pour un triangle donné, c'est tel côté qui est plus grand et pour un autre, c'est tel autre qui est plus grand ; étant embarrassés, ils appelleront P comme arbitre qui leur demandera de vérifier si les triangles sont vraiment semblables et les élèves trouveront des erreurs (*).*
- *Si on a utilisé du papier transparent, on utilisera une caméra, sinon, il sera difficile de faire les comparaisons collectivement. Il est en tout cas essentiel que cette comparaison collective soit effectuée par des élèves (plusieurs), et que ce ne soit pas P qui la fasse… en « sortant de sa poche » la configuration.*

- *La comparaison collective peut encore être l'occasion d'éliminations pour mauvaise construction d'angles : on s'accordera sur une erreur possible d'un degré par angle (certains élèves soulèveront le problème : s'il y a un degré de plus sur deux angles, cela fait deux degrés de moins sur le troisième...)*

- P demande au vainqueur de présenter sa méthode et fait remarquer que les trois côtés « grandissent ensemble » ; lorsque cela semble ne pas être le cas, c'est que les triangles ne sont en fait pas semblables, comme dans (*).

- Les élèves vérifient avec leurs triangles et tombent d'accord sur l'idée des trois côtés qui « grandissent ensemble ».

- P fait le point sur la question initiale qui portait sur les angles : on y a répondu (un, deux et trois angles) et on découvre alors des propriétés relatives aux côtés (des parallèles), à leurs longueurs (on peut trouver plus grand !)

- Dans les classes où la configuration ne serait pas apparue dès la première étape, on énoncera la conjecture ** et on donnera le premier travail à la maison. Il faudra le corriger et donner le deuxième travail à la maison. Il serait bon de ne pas donner les deux énoncés en même temps ; le professeur organisera le travail en fonction de l'emploi du temps de sa classe.

2.1.3 Troisième étape

Correction du (deuxième) travail donné à la maison :
Utilisation du théorème sur les parallèles et angles correspondants : si deux droites d et d' sont parallèles, les angles correspondants qu'elles déterminent avec une sécante commune sont égaux.
Institutionnalisation :

> **Propriété :**
> Si dans un triangle EFG, une droite parallèle à (FG) coupe les côtés $[EF]$ et $[EG]$ respectivement en P et R, alors les triangles EFG et EPR sont semblables.

2.1.4 Quatrième étape

P devra avoir préparé sur du papier épais, ou du carton, le triangle agrandi à présenter (ou le faire sur un logiciel de géométrie dynamique projeté au tableau). Il est important que les dimensions de ce triangle soient telles qu'on ne puisse pas le dessiner sur du A4 ou même du A3, car il s'agit maintenant d'utiliser le modèle « triangles semblables » pour prédire les résultats par le calcul.

P annonce : « J'ai fabriqué moi aussi un triangle qui suit les mêmes contraintes que vous avez eues lors de la séance précédente (question 2) : triangle ABC tel que $\widehat{A} = 43°$ et $\widehat{B} = 115°$. »
P présente le triangle découpé : « C'est bien un triangle semblable aux vôtres ? Vous pouvez vérifier

si vous voulez (le triangle peut passer dans les groupes, mais P doit l'avoir récupéré lorsqu'il pose la question suivante !). J'ai choisi un côté $[AC]$ de longueur 60 cm : pouvez-vous trouver la longueur des deux autres côtés ? »
Remarque : nous avons choisi cette longueur de 60 cm de façon à ce que les élèves ne puissent pas dessiner le triangle en vraie grandeur, même sur une copie double (format A3), l'activité a été testée avec 63 cm et 66 cm, sans changement significatif dans le travail des élèves.
En présentant un « grand » triangle, on plonge les élèves dans un milieu où la notion « d'agrandissement – réduction » devrait apparaître : l'espace de la feuille A4 habituelle et celui du grand triangle n'ont pas la même échelle (il s'agit ici de passer du méso-espace au micro-espace). C'est ce changement d'échelle qui contraint à recourir à l'utilisation de la propriété.
P devra s'efforcer de demander de « trouver » les longueurs, en restant neutre sur la méthode.

Réactions attendues :

- *Certains élèves pourraient demander s'ils peuvent mesurer les longueurs des côtés du grand triangle pour les trouver (mais nous n'avons pas rencontré ce cas, il semble que le changement d'échelle provoqué par la présentation de ce « grand » triangle induise de se placer dans un milieu de connaissances relatives aux longueurs inaccessibles). Si toutefois la question se présente, P répond qu'on ne peut pas mesurer, qu'il faut les trouver depuis sa place, mais qu'on peut toujours vérifier la validité de sa méthode avec les triangles semblables déjà obtenus sur ses calques.*
- *Certains élèves voudront vérifier la similitude des triangles, P les laisse faire.*
- *Certains se restreindront à n'utiliser que les triangles qu'ils ont déjà construits, d'autres en construiront de nouveaux dont les longueurs seront adaptées à la stratégie envisagée.*

Conjectures attendues :

- *Ajouter la même longueur à tous les côtés : à partir d'un triangle déjà construit ou pas, on calcule la différence entre AC et 60 cm, puis on l'ajoute aux deux autres côtés : cette idée apparaît mais a une brève durée d'existence dans le groupe, l'idée de la proportionnalité gagnant rapidement du terrain.*
- *Ceux qui se servent des triangles déjà construits trouvent en général un coefficient rationnel ; dès lors que l'un d'entre eux a « la chance » d'avoir un coefficient décimal, ou mieux, entier, ou bien qu'un autre pense à construire un triangle ad hoc, l'idée diffuse très rapidement dans la classe (les rationnels ne sont pas encore suffisamment familiers et les élèves les évitent dès qu'ils le peuvent…) Ils passent alors de la mesure des côtés de leur triangle au calcul des côtés du grand triangle.*
- *Certains élèves peuvent être arrêtés dans leur travail lorsqu'ils ont à mesurer des longueurs sur leur feuille, pensant alors que leur méthode n'est pas valable, puisqu'elle comporte des mesures ; ce n'est pas, d'après eux, ce que peut attendre le professeur. P les rassure en les renvoyant à la consigne qui n'indique pas de méthode.*

- *Une erreur possible : les élèves se trompent de côté, confondant AB et AC par exemple. Ils s'aperçoivent de leur erreur la corrigent lors de la mise en commun des résultats.*

Pour la mise en commun des résultats, les propositions sont relevées dans un **tableau** où l'on inscrit les longueurs des côtés des triangles ABC, comme ci-dessous.
Dans ce cas, c'est le professeur qui décide du type d'ostensifs à utiliser : les élèves ont déjà, en acte, utilisé la proportionnalité des longueurs, il s'agit maintenant de l'identifier en... la donnant à voir.

On porte sur un des côtés du tableau les coefficients de proportionnalité qui apparaissent dans un sens, et dans l'autre sur l'autre côté : par exemple multiplier par 1/10 pour passer du grand au petit, puis multiplier par 10 pour passer du petit au grand et calculer les longueurs demandées.

AC	AB	BC
60 cm		
10 cm		
6 cm		

Lors de la mise en commun, plusieurs groupes trouvent les mêmes résultats, alors qu'ils ont pris des coefficients différents. La méthode est alors acceptée, y compris par ceux qui ont fait des erreurs de calcul ou de choix de côtés, et ces élèves corrigent.

La conjecture de proportionnalité des longueurs des côtés des triangles semblables est unanimement partagée. Cependant, pour faciliter le passage à l'institutionnalisation, il peut être envisagé de proposer de nouveaux exemples en modifiant les angles et/ou la longueur données aux élèves.

Institutionnalisation :

Conjecture :
Si deux triangles sont semblables, les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles. En particulier, pour des triangles ABC et AEF dans cette configuration (dessiner la configuration de Thalès), les longueurs AB, AC et BC d'une part et AE, AF et EF d'autre part, sont proportionnelles.
Il existe alors deux coefficients de proportionnalité :

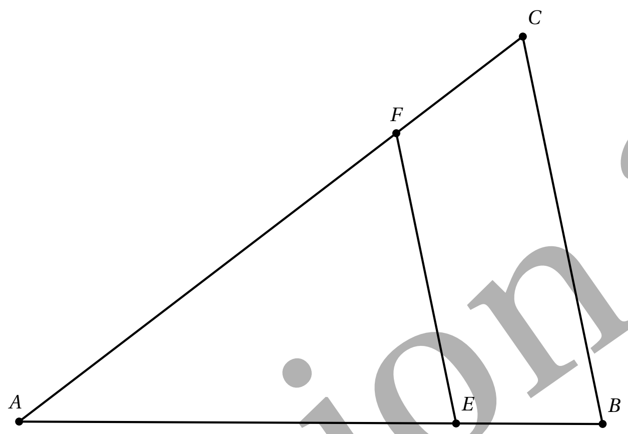
- L'un, k supérieur à 1, égal à $\frac{AB}{AE}$ (et donc à $\frac{AC}{AF}$ et aussi à $\frac{BC}{EF}$), permet de calculer les grandes longueurs à partir des petites : k est appelé coefficient d'agrandissement des longueurs.
- L'autre, k' inférieur à 1, égal à $\frac{AE}{AB}$ (et donc à $\frac{AF}{AC}$ et aussi à $\frac{EF}{BC}$), permet de calculer les petites longueurs à partir des grandes : k' est appelé coefficient de réduction des longueurs.

Ce sera l'occasion d'identifier que ces deux coefficients sont inverses l'un de l'autre, ou encore que $kk' = 1$.

Une fois encore, le travail donné à la maison constitue un prolongement d'étude : à défaut de le démontrer, on demande aux élèves de vérifier que deux triangles semblables ont leurs côtés proportionnels, les élèves disposant pour cela des divers triangles qu'ils ont dû dessiner en classe. Cela constitue le travail « à la maison » pour la prochaine séance.

2.1.5 Cinquième étape

Pour commencer, on corrige l'exercice donné : il s'agissait pour chaque élève de vérifier que pour deux triangles semblables qu'ils avaient déjà dessinés, les longueurs étaient proportionnelles. Pour cette correction, nous appellerons $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ les deux triangles de chacun des élèves, on disposera les longueurs dans un tableau, on recherchera le coefficient de proportionnalité pour arriver à l'égalité des rapports ; on écrira ensuite le théorème de Thalès dans les triangles.



Théorème de Thalès :
Nous venons de vérifier sur plusieurs cas que :
Dans un triangle ABC,

- Si E appartient au segment $[AB]$ et F appartient au segment $[AC]$,
- et si les triangles ABC et AEF sont semblables, autrement dit si les droites (EF) et (BC) sont parallèles,

alors on peut écrire : $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}$ ou $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$

C'est ce que nous appelons le « théorème de Thalès dans les triangles », théorème admis que nous démontrerons dans certains cas particuliers. Cette configuration géométrique est appelée « configuration de Thalès ».
Si les élèves ne le font pas, P peut poser la question « à quoi ça sert ? ». En élargissant l'expérience vécue dans le travail précédent, on pourra évoquer le calcul des longueurs inaccessibles.
Un travail à la maison sera donné portant sur cette question, dont on trouve des exemples dans les manuels. Parallèlement au travail de la technique relatif aux tâches dans lesquelles intervient le

théorème de Thalès, et qui se mène à travers les exercices donnés aux élèves, on poursuit l'étude des démonstrations de certains cas particuliers du théorème de Thalès.

2.2 Phase déductive

2.2.1 Sixième étape : Recherche d'une preuve du théorème de Thalès - Théorème des parallèles équidistantes

P fait remarquer que nous n'avons pas démontré ce théorème, mais que nous avons vérifié sa validité **expérimentalement** et qu'elle semble ne faire aucun doute. Il peut indiquer que les mathématiciens choisissent parfois de démontrer un théorème dans des cas particuliers jusqu'à ce que l'un d'entre eux trouve les moyens de le prouver en général. C'est ce que nous allons tenter de faire.
Ce travail s'appuie sur les cas d'égalité des triangles présents à nouveau dans les programmes du collège. Dans l'ouvrage « Premiers éléments de géométrie » (Vacquant & Macé de Lépinay, 1920), les auteurs rappellent ce que l'on doit entendre par « cas d'égalité des triangles » :

- « Les trois côtés et les trois angles d'un triangle forment six grandeurs que l'on nomme les six *éléments* du triangle.
- On dit que deux triangles sont *égaux* quand ils sont superposables.
- Quand deux triangles sont égaux, les six éléments de l'un sont égaux aux six éléments de l'autre.
- On appelle *cas d'égalité des triangles* certains cas dans lesquels on peut affirmer que deux triangles sont égaux.

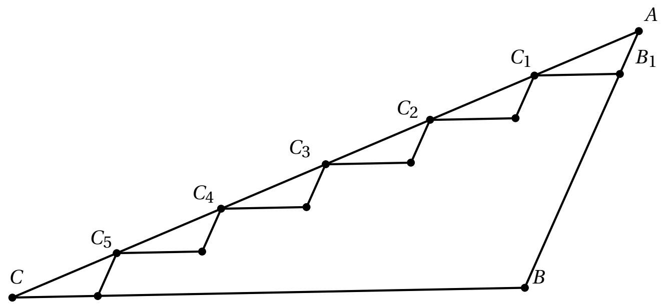
Il existe trois cas d'égalité des triangles que l'on peut démontrer. Autrement dit, deux triangles ont leur six éléments égaux chacun à chacun dès qu'ils ont trois éléments égaux chacun à chacun et que ces éléments forment un des trois groupes suivants :

1. Un côté et les deux angles adjacents,
2. deux côtés et l'angle compris,
3. les trois côtés. »

Il est ainsi fréquent d'utiliser ce résultat pour établir l'égalité de deux angles ou de deux portions de droites.
Ces cas d'égalité auront été étudiés précédemment au cours du cycle à l'aide d'un autre Parcours d'Étude et de Recherche, certainement en cinquième. L'idée pour la démonstration est de s'appuyer sur une expérimentation déjà éprouvée par les élèves. Il faudra suggérer aux élèves de revenir sur la détermination des longueurs du « grand » triangle ABC tel que $AC = 60$ cm à l'aide des longueurs de triangles semblables plus « petits », en particulier ceux dont la longueur du côté homologue à $[AC]$ mesurait 10 cm.

P propose alors aux élèves l'expérience suivante : Après avoir fixé au tableau le « grand » triangle, ou l'avoir projeté avec un logiciel de géométrie dynamique, des élèves viennent au tableau avec « leurs » triangles pour placer les longueurs de 10 cm sur le segment de longueur 60 cm.

On obtient ainsi la figure suivante :



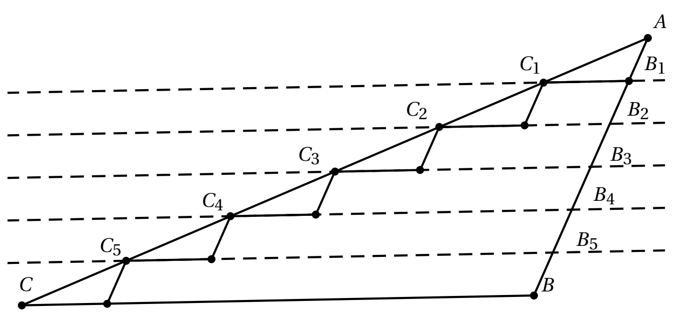
On constate aisément que le segment $[AC]$ de longueur 60 cm est partagé en six segments de longueur 10 cm.
La question à poser aux élèves pourrait alors être la suivante :
Comment vérifier qu'en « coulissant » ces triangles vers la droite parallèlement à (CB), le segment $[AB]$ sera également partagé en six segments de la même longueur, ce qui prouverait la proportionnalité des longueurs des côtés.
Il apparaît ici un nouveau point de programme lié aux transformations ; il s'agit en effet de « translater » les triangles vers la droite.

Il s'agit en fait d'une translation d'un certain vecteur colinéaire aux vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{C_1B_1}$.
La question qui se pose alors à ce sujet : ***De combien de fois $\overrightarrow{C_1B_1}$ dois-je me déplacer pour que chacun des triangles arrive à destination ?***

Il faut pour cela faire une démonstration en deux temps :

- Tout d'abord, montrer qu'il existe un faisceau de droites parallèles,
- Montrer que ce faisceau partage le segment $[AB]$ en six segments de même longueur.

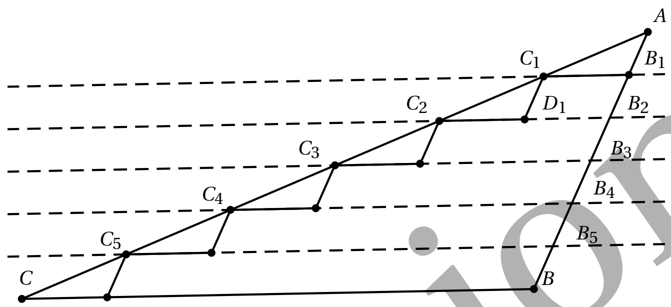
La première question à poser aux élèves est :
Comment prouver que les droites obtenues à partir des bases des « petits » triangles sont parallèles ?
On pourra alors tracer la figure suivante que les élèves reproduiront sur leur cahier à une l'échelle $\frac{1}{10}$ par exemple.



La difficulté tient ici au fait didactique bien connu en géométrie de « l'extraction » d'une figure simple au sein d'une figure complexe. En cas de blocage dans la classe, P pourra être amené à proposer aux élèves de commencer par le cas le plus simple des triangles de côtés C_1B_1 et C_2B_2 pour ensuite être étendu aux autres triangles. L'idée de la sous-figure devrait alors apparaître naturellement aux élèves.

Les élèves indiquent que les angles correspondants $\widehat{AC_1B_1}$ et $\widehat{AC_2B_2}$ sont de même mesure et donc que les droites (C_1B_1) et (C_2B_2) sont parallèles. Il est assez simple de vérifier que cette démonstration s'étend aux autres droites du faisceau.
La seconde question à poser est maintenant :
Comment démontrer que les segments délimités sur $[AB]$ par les parallèles sont égaux ?

*L'idée de la sous-figure, devenue plus familière aux élèves, devrait cette fois-ci émerger plus facilement. La sous-question devient alors : **Comment démontrer que** $AB_1 = B_1B_2$?*



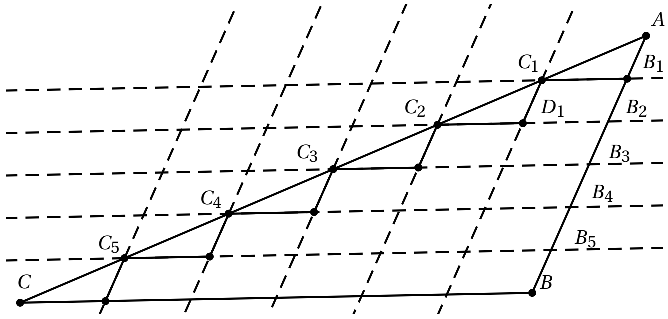
Les triangles AC_1B_1 et $C_1C_2D_1$ sont égaux (*isométriques*). Par conséquent, les côtés (*homologues*) sont de même longueur : $AB_1 = C_1D_1$.
De plus, les angles correspondants $\widehat{C_1AB_1}$ et $\widehat{C_2C_1D_1}$ sont de même mesure. Les droites (C_1D_1) et (AB_1) sont ainsi parallèles. Or, les droites (C_1B_1) et (C_2B_2) sont elles-aussi parallèles. Donc, le quadrilatère $C_1D_1B_2B_1$ est un parallélogramme, ce qui implique que $C_1D_1 = B_1B_2$.
En conclusion, $AB_1 = B_1B_2$.
Par extension de la démonstration, nous pouvons ainsi affirmer que les segments délimités par le faisceau de droites parallèles sont égaux.

Cette preuve peut elle-même s'étendre à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, ce qui semble a priori largement suffisant pour le cycle 4.

Le théorème des parallèles équidistantes démontré ci-dessus dans un cas particulier permet de prouver le théorème de Thalès dans le cas rationnel. En effet, le segment $[BC]$ est également découpé par un autre faisceau de droites parallèles et il est ainsi partagé selon six segments de même longueur. S'il s'avérait que cette remarque n'émerge pas dans la classe, P pourrait être amené à poser une question :

À quoi est égal $\dfrac{B_1C_1}{BC}$ ou encore $\dfrac{C_5B_5}{CB}$?

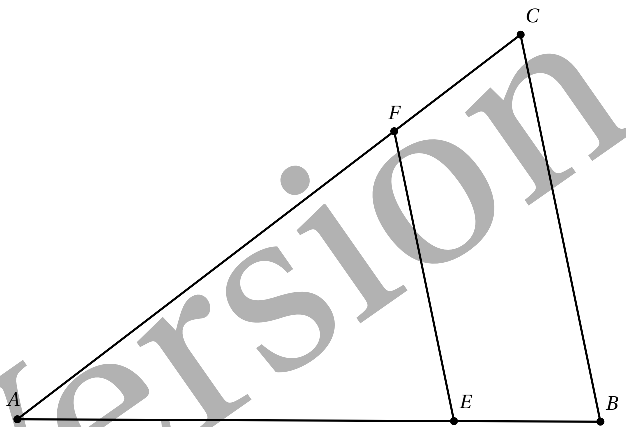
On obtient la nouvelle figure suivante :



On a bien alors, par exemple :
$\dfrac{AC_5}{AC} = \dfrac{AB_5}{AB} = \dfrac{C_5B_5}{CB} = \dfrac{5}{6}$

2.2.2 Recherche d'une preuve de la réciproque du théorème de Thalès

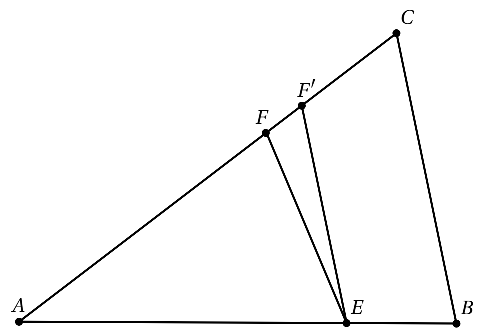
Nous avons choisi d'utiliser le raisonnement par l'absurde pour que les élèves puissent faire la démonstration.

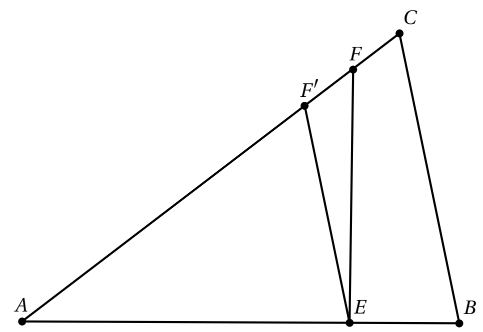


Les élèves doivent formuler eux-mêmes l'énoncé de cette réciproque qui pourra, par exemple, prendre la forme suivante :

> **Conjecture :**
> Dans le triangle ABC,
>
> - Si $E \in [AB]$ et $F \in [AC]$,
> - et si $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$
>
> alors les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

Supposons que cette réciproque ne soit pas vérifiée et qu'ainsi l'égalité $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ soit vraie et que les droites (EF) et (BC) ne soient pas parallèles. Plaçons alors sur le segment $[AC]$ le point F' tel que les droites (EF') et (BC) soient parallèles. On obtient alors une des deux figures suivantes :





Comme les droites (EF') et (BC) sont parallèles, il est possible d'appliquer le théorème de Thalès direct. On a alors : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF'}{AC}$. Or, il est assez aisé, dans les deux cas de s'assurer que $AF \neq AF'$. On ne peut donc avoir simultanément $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC}$ et $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF'}{AC}$, ce qui prouve par l'absurde que le point F se situe en F' et que donc les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

3 Possibilité d'ouverture sur les agrandissements-réductions des aires

Lors de ce Parcours d'Étude et de Recherche, l'objectif visé, qui était l'étude du théorème de Thalès et de sa réciproque a été plus que largement rempli. Les élèves ont, en effet, rencontré bien davantage de mathématiques que cette simple étude. Nous allons proposé ici un prolongement possible de ce travail en réutilisant une figure que les élèves connaissent déjà. À nouveau, il s'agira d'effectuer un travail en deux phases :

- une première phase expérimentale pour qu'ils rencontrent les propriétés visées par l'étude,
- une seconde phase déductive pour prouver que ce qui a été conjecturé est mathématiquement vrai.

3.1 Phase expérimentale

3.1.1 Première partie - Cas déjà étudié

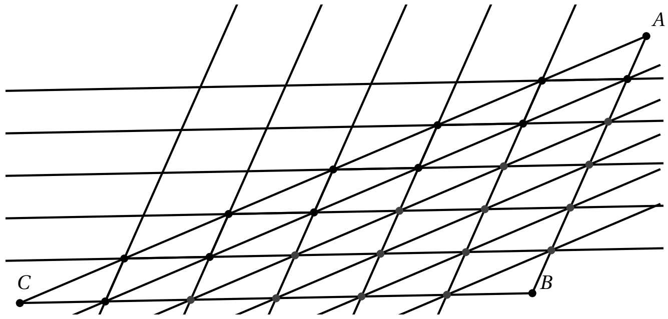
La question de départ de cette poursuite d'étude est la suivante :

Combien de « petits » triangles (dont un côté mesure 10 cm) puis-je mettre dans le « grand » triangle (dont un côté mesure 60 cm) ?

Les élèves auront certainement l'idée (sinon il faudra leur suggérer) de reproduire la figure déjà rencontrée, de terminer le découpage puis de compter le nombre de « petits » triangles.

> *P devra respecter le temps alloué aux élèves pour se remémorer le travail réalisé autour de cette figure, surtout dans le cas où il se serait écoulé une longue période depuis lors.*

Les élèves devraient ainsi obtenir la figure suivante :



Le comptage des « petits » triangles mène au résultat attendu : 36. Il conviendra ici de formuler le résultat suivant concernant les aires :
Si les longueurs des côtés d'un triangle sont multipliées par 6, alors son aire est multipliée par 36.

> *P devra veiller ici à ce que les élèves ne se contentent pas de ce résultat mais qu'ils cherchent à le généraliser. Ceux-ci devraient déjà être rompus à ce genre de travail et des pistes de poursuite de recherche devraient émerger de la classe, notamment la possibilité de faire d'autres essais pour conjecturer une formule permettant de calculer directement le nombre de « petits » triangles. Si ça n'était pas le cas, P pourra proposer aux élèves d'utiliser une sous-figure ou une sur-figure de la figure précédemment réalisée.*

3.1.2 Deuxième partie - Choix d'autres exemples pour émettre une conjecture

Chaque groupe sera laissé libre du choix de la longueur du côté du « grand » triangle, plusieurs résultats émergeant ainsi de la classe. P devra, à nouveau, inciter les élèves à formuler leurs résultats sous la forme :
Si les longueurs des côtés d'un triangle sont multipliées par ..., alors son aire est multipliée par ....
Si, au vu de ces multiples résultats, la conjecture n'émergeait pas de la classe, P pourra alors envisager de les regrouper dans un tableau :

Cœfficient multiplicateur de longueur	Cœfficient multiplicateur d'aire
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49

> *L'idée d'ajouter une ligne supplémentaire au tableau en indiquant n dans la première colonne devra, si possible, venir des élèves. Le n^2 dans la deuxième ne devrait alors pas poser de problème.*

Nous arrivons ainsi à la conjecture suivante :

> **Conjecture :**
> Si les longueurs des côtés d'un triangle sont multipliées par n, alors son aire est multipliée par n^2.

3.2 Phase déductive

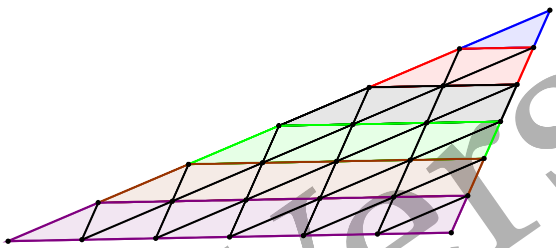
3.2.1 Troisième partie - Mise au point d'une technique de comptage et d'une conjecture algébrique

Il existe plusieurs techniques de comptage des « petits » triangles. Chacune de ces techniques aboutira sur une formulation différente de la conjecture.

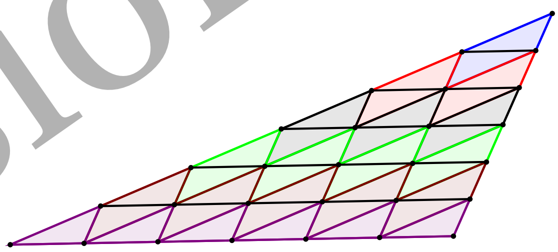
> *Si les élèves ne voient pas l'intérêt de mettre au point une telle technique de comptage, il suffira à P de leur demander de compter le nombre de petits triangles obtenus en multipliant la longueur du côté par 57 !*

Voici, par exemple, deux méthodes de comptage :

Nous avons ici le mode de calcul suivant :
$1+3+5+7+9+11=36$



Nous avons ici le mode de calcul suivant :
$2+4+6+8+10+6=36$



Il apparaît ainsi clairement à gauche la somme des n premiers entiers impairs, alors qu'à droite la formulation est plus ardue à mettre en place. On pourrait bien entendu écrire :
$2(1+2+3+\ldots+(n-1))+n$ mais cela semble hors de portée d'élèves de collège. La preuve également ne semble pas abordable. Le choix devrait donc se porter sur la conjecture suivante :

> **Conjecture :**
> La somme des n premiers entiers impairs est égale à n^2.

3.2.2 Quatrième partie - Preuve de la conjecture algébrique

Le travail proposé ici se déroule en trois temps :

- Un premier temps consistant à vérifier la conjecture sur quelques exemples et permettant d'appréhender le fait que la somme des n premiers entiers impairs est égale à la somme des

$(n-1)$ premiers entiers impairs et du $n^{ième}$. La question de l'expression du $n^{ième}$ entier impair en fonction de n devrait alors se poser,

- un deuxième temps s'appuyant sur une manipulation expérimentale et reposant sur les nombres carrés,
- un troisième temps proposant une preuve formelle directement déduite du début de formalisation du temps 1 et de l'expérience réalisée par les élèves au temps 2.

1 Temps 1 : La possibilité, éventuellement la nécessité, de lister les résultats dans un tableau pourra apparaître.

Somme d'entiers impairs	Carré
1	$1^2 = 1$
$1+3=4$	$2^2=4$
$1+3+5=9$	$3^2=9$
$1+3+5+7=16$	$4^2=16$
$1+3+5+7+9=25$	$5^2=25$
$1+3+5+7+9+11=36$	$6^2=36$
$\dots$	$\dots$
$1+3+\dots+?=841$	$29^2=841$

P devra ici poser une question, si elle n'émerge pas de la classe, autour de la valeur du $n^{ième}$ nombre impair comme indiqué sur la dernière ligne du tableau. Autrement dit, comment déterminer la somme d'entiers impairs à laquelle correspond le calcul du carré de 29 *?*

La question pour les élèves pourra prendre la forme suivante :

> Par quel programme de calcul unique obtient-on 3 à partir de 2 ; 5 à partir de 3 ; 7 à partir de 4 ; 9 à partir de 5 ; etc ?

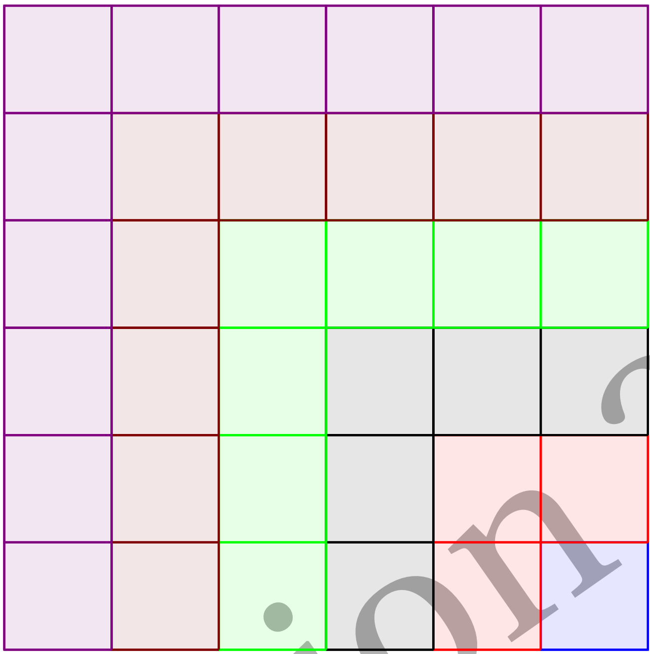
Le programme consistant à multiplier par 2 puis à soustraire 1 ne devrait pas avoir de mal à émerger ici.

Il est important que P fasse reformuler la conjecture aux élèves ici. Celle-ci prendra alors la forme suivante :
Pour tout n entier, $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$

2 Temps 2 : Après être passé d'une conjecture géométrique à une conjecture algébrique, nous proposons ici d'utiliser des figures géométriques, en l'occurrence des carrés, pour que les élèves s'engagent dans une approche expérimentale de la preuve. Il s'agira de poser cette fois la question suivante aux élèves, tout en leur fournissant des carrés de papier préalablement découpés :

Je vais donner à chaque groupe des carrés de papier de la façon suivante : d'abord 1 ; puis 3 ; puis 5 ; . . . Il faudra les placer de telle sorte que les égalités obtenues ci-dessus apparaissent.

La construction attendue prendra la forme présentée ci-dessous :



La conjecture formulée ci-dessus est ainsi établie expérimentalement : $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$. Il faudra ici faire émerger l'idée suivante qui est à la base du raisonnement par récurrence : « Si je sais déjà, par exemple, que $1+3 = 2^2$, alors en ajoutant 5, j'obtiens $1+3+5 = 2^2+5 = 3^2$ », et ainsi de suite. Il ne faudra pas hésiter à faire écrire aux élèves la totalité des égalités de ce type. Il apparaît encore ici que l'enseignement par Parcours d'Étude et de Recherche permet de générer beaucoup de mathématiques. Les élèves auront ainsi l'occasion de rencontrer « en acte » un premier type de raisonnement par récurrence.

3 Temps 3 : La généralisation des écritures obtenues ci-dessus par les élèves peut s'écrire alors : Si je sais que $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$, alors en ajoutant $(2n+1)$, j'obtiens $1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$. Des difficultés liées à l'écriture du nombre entier impair suivant $(2n-1)$ ou encore à la factorisation de n^2+2n+1 pourraient se présenter dans certains groupes. Il faudra veiller à diffuser auprès de la classe ce genre d'informations dès qu'elles auront été trouvées dans d'autres groupes.

Dans cette partie, il aura ainsi été démontré que, si les longueurs d'un triangle sont multipliées par un nombre entier n, alors son aire est multipliée par n^2. Pour démontrer ce résultat pour un nombre rationnel k, il suffirait de prouver que si les longueurs d'un triangle sont divisées par un nombre entier m, alors son aire est divisée par m^2, puis passer au rationnel $\frac{m}{n}$. Ce résultat devra être institionnalisé

et faire l'objet d'un travail de la technique en donnant divers exemples à traiter par les élèves.
Instituionnalisation :

> Si les longueurs d'un triangle sont multipliées par un nombre entier n, alors son aire est multipliée par n^2. Ce résultat sera admis pour un nombre rationnel k.

La partie qui correspond à la preuve de la somme des nombres impairs par le calcul littéral fera partie d'un ensemble de rencontres avec cette forme de généralisation d'un résultat numérique comme il est préconisé dans les programmes.