Situation : « Le Plus Grand Produit »

Le document suivant est extrait d'un ensemble de ressources plus vastes construites par un groupe de recherche INRP-IREM-IUFM-LEPS.
La problématique de ce groupe est centrée sur le questionnement suivant : en quoi les problèmes de recherche et la dimension expérimentale qu'ils contiennent permettent-ils des apprentissages mathématiques (et pas seulement transversaux) ?

1 Situation mathématique

Un énoncé à tout niveau :

Le nombre 23 peut s'écrire de plusieurs façons comme la somme d'entiers : par exemple : 23 = 11+5+7 .
Trouver parmi ces sommes, celle dont le produit des termes est maximum.
Et avec d'autres nombres ?

Un autre énoncé :

Parmi les décompositions additives d'un entier, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.

La solution du problème peut s'exprimer de la façon suivante :
- si le nombre est un multiple de 3, le plus grand produit est obtenu en calculant $3 \times 3 \times ... \times 3$ (décomposition en $3 + 3 + ... + 3$; par exemple pour 12 le plus grand produit est $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$)
- si le reste du nombre dans la division par 3 est 1 (« si le nombre est égal à un multiple de 3 plus un », pour reprendre une formulation fréquente des élèves), le plus grand produit est obtenu en faisant $3 \times 3 \times ... \times 3 \times 4$; (décomposition $3 + 3 + ... + 3 + 4$, le 4 obtenu en ajoutant le dernier 3 et 1 ; par exemple pour 10 le plus grand produit est 36 ; $3 \times 3 \times 4$ ou $3 \times 3 \times 2 \times 2$)
- si le reste du nombre dans la division par 3 est 2 (« si le nombre est égal à un multiple de 3 plus 2 »), le plus grand produit est obtenu en faisant $3 \times 3 \times ... \times 3 \times 2$ (par exemple pour 14 le plus grand produit est $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 = 162$).

La preuve de cette solution s'appuie sur les propriétés suivantes :

a. si 0 figure dans la décomposition additive, le produit des termes est nul.

b. si 1 figure dans la décomposition additive, le produit des termes est amélioré en ajoutant 1 à un des termes du produit (ex $3 \times 3 \times 4$ au lieu de $3 \times 3 \times 3 \times 1$).

c. si, dans une décomposition additive, tout nombre supérieur ou égal à 5 est décomposé en deux termes supérieurs à 1, le produit de ces 2 termes sera plus grand que le nombre de départ.
En effet, si n est un des nombres de la décomposition, en le remplaçant par $[(n-2)+2]$ on ne change pas la somme, et le produit devient $2 \times (n-2) = 2n - 4 = n + (n-4)$. Or $(n-4)$ est positif si n est supérieur à 4, donc $n + (n-4)$ est supérieur à n, si n est supérieur à 4. Tout nombre n supérieur à 4 (supérieur ou égal à 5) permet d'obtenir un plus grand produit si on le remplace par $2 \times (n-2)$. En appliquant cette propriété, les seuls nombres conservés sont des 3 ou des 2 (puisque $4 = 2 \times 2$).

d. si dans un produit on remplace $2 \times 2 \times 2 = 8$ par $3 \times 3 = 9$, le produit sera plus grand ; donc dès qu'il y a trois 2 dans la décomposition, on remplace $2 \times 2 \times 2$ par 3×3 ; on ne conserve donc parmi les termes du produit que un ou deux 2.

2 Éléments didactiques pour la mise en œuvre en classe

2.1 Scénarios

2.1.1 Scénario au cycle 3

Le texte qui suit est extrait de l'ouvrage « Vrai ? Faux ? ... On en débat » auquel nous renvoyons pour plus de détails.

Déroulement de la situation dans un $CM1$ Cette situation se compose de deux phases bien distinctes. [1].
La première phase porte sur la recherche des solutions pour quelques valeurs numériques (10, puis 14, et éventuellement 16). Elle a pour but de permettre l'appropriation du problème : que les élèves comprennent qu'ils ont à décomposer additivement un nombre,

à calculer le produit correspondant, à effectuer plusieurs essais, puis à les comparer pour optimiser le résultat. L'objet de cette phase n'est pas de prouver si les résultats obtenus sont les plus grands, ce qui sera proposé à la phase suivante. La recherche est individuelle. Le maître fait formuler les différents résultats en commençant par les décompositions additives erronées (celles dont la somme des termes est différente du nombre donné au départ, par exemple à la suite d'une erreur de calcul), puis par celles qui ne sont pas les plus pertinentes (par exemple $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$), et enfin les meilleures trouvées, mais sans se prononcer sur le fait que le résultat produit est bien le plus grand possible.

[1] Le déroulement est présenté de façon détaillée dans ERMEL CM1.

Dès la fin de la première phase, les élèves décomposant en plus de deux termes, des constats peuvent aussi être formulés, comme justification des choix avancés, voire des premières propositions de généralisation, par exemple :
- « ce n'est pas parce qu'il y a beaucoup de termes qu'on a forcément un grand produit » ;
- « utiliser 1 ne sert à rien » ;
- « ce n'est pas en ne prenant que deux grands nombres [en décomposant 14 en deux nombres] que l'on a un grand produit »...

Dans une seconde phase les élèves cherchent une méthode plus générale. Cette phase se déroule lors d'une nouvelle séance, un autre jour, pour permettre à chaque élève de se « décentrer » des calculs qu'il a effectués pour des nombres particuliers lors de la séance précédente.

L'objectif de cette phase est de faire prendre conscience aux élèves que, pour chaque proposition, il faut savoir :
- si on est sûr qu'elle est vraie et pourquoi ?
- ou s'il faut chercher à le montrer et comment ?

Dans cette seconde phase, plusieurs étapes :

a. Étape 1 : les élèves élaborent individuellement des propositions.
   Ce moment est particulièrement important pour qu'il y ait un « engagement » personnel ultérieur des élèves sur leurs propositions.
b. Étape 2 : Les propositions sont débattues collectivement
   – tri préalable des propositions par le maître (Renvoi à l'ouvrage cité pour des détails)
   – Débat sur les différents types de propositions.
c. Étape 3 : Les élèves ont à se prononcer par petits groupes sur des propositions sur lesquelles il n'a pas été possible de trancher lors de l'étape précédente. Il s'agit de répondre à la question : sont-elles vraies, fausses, et pourquoi ? Chaque groupe rédige sa réponse sur une affiche.
d. Étape 4 : Mise en commun : Elle permet de faire expliciter les conclusions de chaque groupe et de mener un débat collectif sur la validité de ces propositions. Le but de cette étape est de critiquer les preuves énoncées précédemment. Les propositions sont examinées, les preuves sont formulées.
e. Étape 5 : Une relance de la recherche peut être effectuée si nécessaire.
f. Étape 6 : Une synthèse peut être faite par le maître si nécessaire, sinon le maître peut demander aux élèves ce qu'ils pensent avoir appris.

2.1.2 Scénario pour une séance avec des stagiaires PCL

La séance dure 1h 20 :
La présentation du problème et la recherche individuelle : 10 minutes
La recherche en 4 groupes de 4 ou 5 étudiants : 50 minutes (dont la rédaction de l'affiche).
La mise en commun : 20 minutes

L'énoncé est dicté par le formateur : « Parmi les décompositions additives d'un entier, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand »

Les objectifs de cette séance sont les suivants :
Présenter ce qu'est un problème de recherche en en faisant chercher un aux stagiaires, plutôt que de faire un cours magistral à ce propos.
Institutionnaliser, après cette recherche, les éléments théoriques suivants : caractéristiques d'un problème de recherche, objectifs didactiques et pédagogiques poursuivis, gestion de la classe, obstacles à la mise en œuvre, points positifs, etc.

2.2 Comptes rendus

2.2.1 Au cycle 3

Nous renvoyons ici aussi au travail réalisé par l'équipe ERMEL et l'INRP dans l'ouvrage déjà cité : « Vrai ? Faux ? ... On en débat »

En voici un extrait : **Commentaires sur la situation « le plus grand produit »** :

Dans les différentes classes où cette situation a été expérimentée, ce problème constitue bien un enjeu intellectuel pour les élèves ; ils sont curieux de trouver le meilleur résultat ils essaient d'induire une méthode, de l'appliquer à de nouveaux nombres et entrent dans le travail de critique des propositions.
Pour que cet enjeu intellectuel existe tout au long de la situation, il est essentiel que les élèves aient la charge de la critique de leurs propositions.
La résolution sollicite une coopération effective de la classe, car tous les élèves ne perçoivent pas d'eux-mêmes, sans le recours à la confrontation avec les autres, la nécessité de prouver, ni ne peuvent chacun, isolément, apporter la preuve de leur solution ; ils

sont obligés de formuler leur méthode, donc de l'identifier ; ils comprennent aussi qu'ils ont besoin d'utiliser des termes précis pour communiquer leurs propositions et pour débattre.
Le calcul du produit de nombres dans le domaine numérique choisi n'est pas un obstacle (aux erreurs de calcul près). Dans cette situation les limites, plus que celles des connaissances donc, sont celles relatives à la capacité de s'investir dans un problème de recherche (c'est pour cela que ce problème n'est pas proposé en tout début d'année, il est nécessaire que les élèves aient déjà pris confiance dans leurs capacités à chercher), à l'assurance plus ou moins grande dans l'expression. Par ailleurs, si l'avis des meilleurs élèves a une influence, il n'est pas « écrasant », car il ne s'appuie pas sur des certitudes (ancrées ou non sur des connaissances) préalables relatives à la solution du problème.

Les choix du maître

Les choix effectués par le maître lors du déroulement de la situation sont déterminants, en particulier il ne peut pas laisser s'effectuer des recherches pour trop de valeurs numériques différentes, lors de la première phase, sinon les élèves auraient plus de difficultés à se décentrer de ces calculs, pour formuler une proposition générale. De plus, si les calculs sont accumulés pour beaucoup de nombres, la solution risquerait de se diffuser dans toute la classe ; la seconde phase n'aurait plus pour but que la preuve d'une solution devenue évidente pour beaucoup d'élèves, alors convaincus car ils n'auraient pas de meilleure proposition à faire. Une autre tâche du maître consiste à effectuer le tri des propositions produites par les élèves, pour en permettre la critique à l'étape 2. Le nombre de propositions soumises à la critique (pour ce problème où leur analyse par chaque groupe prend du temps) ne peut être trop grand. Le maître veille aussi, à faire formuler ou reformuler les propositions, et les raisonnements les critiquant ou les justifiant, à faire préciser le statut qu'acquièrent les propositions débattues, infirmées/ confirmées et à faire expliciter les preuves.

2.2.2 Compte rendu d'expérimentation en PCL2. Durée : 1h20

Bilan de cette séance de recherche :
Les stagiaires se sont pris au jeu ; leur recherche a été active, le travail de groupe dynamique et efficace. Pendant le temps de recherche individuelle, un seul stagiaire a utilisé le calcul algébrique, les autres ont fait des essais numériques.
La conjecture exacte n'est pas apparue tout de suite, même en travail de groupe. Elle a été le fruit de débats utilisant des exemples, des contre-exemples extraits des essais effectués précédemment.
Ensuite, les groupes ayant trouvé la conjecture exacte ont essayé de la démontrer. Tous en ont exprimé la nécessité.
Seul un groupe, et plus précisément un stagiaire dans le groupe, a trouvé une démonstration complète.
Deux autres groupes ont tenté une démonstration par récurrence : l'un d'eux n'a pas abouti et n'a pas rédigé ses essais sur l'affiche, l'autre groupe a rédigé sur l'affiche en posant le problème.
Comme l'a résumé l'un des stagiaires à la fin de la mise en commun : « il y en a, des maths, dans ce problème ! ! ».
C'est une réflexion qui revient assez souvent lors de ce genre de séance où l'on fait chercher un problème ouvert à des stagiaires PCL2 : l'énoncé leur paraît simple (il l'est ! ! !), mais assez vite, il leur résiste, et il leur semble alors que la consistance mathématique est présente, qu'il y a « du grain à moudre » en quelque sorte.

2.2.3 Dans la partie principale de la ressource vous pouvez aussi avoir accès à des retranscriptions de dialogues d'élèves de seconde.

3 Objets mathématiques susceptibles d'être travaillés

Comme cela a été rapidement évoqué plus haut, ce problème est un problème de recherche. La mise en oeuvre proposée est bien entendue liée à une attitude attendue des élèves et à une volonté du professeur de la faire vivre.

Nous ne développons ici que quelques compétences liées à l'activité de résolution de problème proprement dite (savoir mettre en oeuvre une démarche scientifique, savoir oser, réaliser des essais avec ou sans outils, dégager des sous-problèmes, changer de cadres, conjecturer, se poser le problème de la démonstration, de la preuve...).

Concernant les objets mathématiques travaillés, plusieurs sont des objets que l'on peut estimer acquis dès la quatrième, mais certains types de raisonnements permettent d'envisager la mise en oeuvre de cette situation à tous les niveaux du lycée, voire au delà.

Programmes de Cycle3	Méthodes travaillées
La pratique des mathématiques développe le goût de la recherche et du raisonnement, l'imagination et les capacités d'abstraction, la rigueur et la précision. Du CE2 au CM2, dans les quatre domaines du programme, l'élève enrichit ses connaissances, acquiert de nouveaux outils, et continue d'apprendre à résoudre des problèmes.	- savoir émettre des hypothèses - savoir formuler précisément des propositions pour pouvoir en débattre - prouver une proposition

Programmes de Cycle3	Objets travaillés
- écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, ... ; - restituer les « tables d'addition » et de multiplication de 2 à 9 ; - utiliser les techniques opératoires des quatre opérations sur les nombres entiers ... ; - calculer mentalement en utilisant les quatre opérations ; - résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, ..., et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres,	- 0 élément absorbant de la multiplication - 1 élément neutre de la multiplication - les décompositions additives d'un entier - les tables de multiplications - associativité et commutativité de la multiplication - ... - compréhension des termes « somme » « produit » « termes » « produit des termes de la somme » - raisonnements élémentaires sur les nombres : $1 \times 1 < 2; 1 \times 1 \times 1 < 3$ et $1 \times 2 < 3; 2 \times 2 > 1 \times 3$

Programmes de Sixième	Objets travaillés
- comparer deux nombres entiers ou décimaux, ranger une liste de nombres. - encadrer un nombre, intercaler un nombre entre deux autres. - connaître les tables d'addition et de multiplication et les résultats qui en dérivent - choisir les opérations qui conviennent au traitement de la situation étudiée. - savoir effectuer ces opérations sous les diverses formes de calcul : mental, posé, instrumenté. - connaître la signification du vocabulaire associé : somme, différence, produit, terme, facteur.	- 0 élément absorbant de la multiplication - 1 élément neutre de la multiplication - les décompositions additives d'un entier - les tables de multiplications - associativité et commutativité de la multiplication - ... - compréhension des termes « somme » « produit » « termes » « produit des termes de la somme » - raisonnements élémentaires sur les nombres : $1 \times 1 < 2; 1 \times 1 \times 1 < 3$ et $1 \times 2 < 3; 2 \times 2 > 1 \times 3$

Programmes de Cinquième

Comme en classe de Sixième, cette partie du programme (Nombres et Calculs) s'appuie fondamentalement sur la résolution de problèmes.
Ces problèmes, en associant à une situation donnée une activité numérique, renforcent le sens des opérations et des diverses écritures numériques et littérales. Dans la continuité de ce qui est fait en classe de Sixième, les problèmes proposés sont issus de la vie courante, des autres disciplines ou des mathématiques.

Capacités :

- effectuer une succession d'opérations donnée sous diverses formes (par calcul mental, posé ou instrumenté), uniquement sur des exemples numériques.
- écrire une expression correspondant à une succession donnée d'opérations.
- reconnaître, dans des cas simples, si un nombre entier positif est multiple ou diviseur d'un autre nombre entier positif.

Programmes de Quatrième et de Troisième

Les objets mathématiques utilisés sont a priori en place dans ces niveaux de classe. Le problème permet alors, à partir de ces objets parfaitement naturalisés de développer les compétences attendues par les programmes :

... « La pratique du calcul numérique (exact ou approché) sous ses différentes formes en interaction (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) a pour objectifs : - la maîtrise des procédures de calcul effectivement utilisées, - l'acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres, - la réflexion et l'initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre suivant la situation. »	Attitudes : ...l'étude des mathématiques au cycle central permet aux élèves d'appréhender l'existence de lois logiques et développe : - le sens de l'observation ; - l'imagination raisonnée, l'ouverture d'esprit ; - ... - la rigueur et la précision ; - le respect de la vérité rationnellement établie ; - l'esprit critique : distinction entre le prouvé, le probable ou l'incertain, la prédiction et la prévision, situation d'un résultat ou d'une information dans son contexte ; - la volonté de justesse dans l'expression écrite et orale, du goût pour l'enrichissement du vocabulaire ; - la volonté de se prendre en charge personnellement ; - l'ouverture à la communication, au dialogue, au débat ; - l'envie de prendre des initiatives, d'anticiper, d'être indépendant et inventif en développant les qualités de curiosité et créativité.

Programmes de Seconde	**Objets travaillés**
L'organisation de la classe doit permettre aux élèves d'expérimenter les diverses facettes de l'activité mathématique décrites dans l'introduction du programme. Certaines (« chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, expliquer oralement une démarche, rédiger au brouillon puis au propre, (...), accéder au plaisir de la découverte et à l'expérience de la compréhension ») renvoient à l'étude de situations et à la résolution de problèmes.	Compétences méthodologiques complémentaires et en particulier : - raisonnement par disjonction des cas - raisonnement par récurrence - rédaction de la solution au problème posé - interprétation des raisonnements élémentaires sur les nombres ($1 \times 1 < 2; 1 \times 1 \times 1 < 3$ et $1 \times 2 < 3; 2 \times 2 > 1 \times 3$) en terme de forme de la décomposition additive obtenue pour l'entier de départ.

Les points suivants peuvent aussi être travaillés au lycée :

- division euclidienne par trois, plus précisément restes dans cette division
- calcul algébrique, plus précisément résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue, et interprétation des solutions en revenant au problème posé
- aspect algorithmique (le plus grand produit $a(n)$ est défini pour $n > 4$ par : $a(n) = 3 \times a(n-3)$)

4 Situations connexes

Quelques situations connexes permettant un approfondissement

Partons de l'encyclopédie Sloane. Sous le nom de A000792 une des pages précise quelques propriétés de ce plus grand produit.
http ://www.research.att.com/ njas/sequences/A000792
Elle cite une dizaine de définitions différentes du nombre $a(n)$ égal au plus grand produit obtenu avec les partitions de n en somme.
Si pour $n = 0$ on pose $a(0) = 1$, alors nous avons la formule de récurrence :
a(n) = max (n-i)a(i) : i<n ; a(0) = 1 .

C'est en fait la définition choisie par l'encyclopédie.

Nous n'allons pas donner toutes les propriétés de cette suite, mais en citer quelques unes :

- 1. $a(n)$ est de la forme $2^p\ 3^q$ avec $p \leq 2$, $q \geq 0$ et $2p + 3q = n$ (résultat attendu du problème ouvert).
- 2. $a(n) = 3 \times a(n-3)$ pour $n > 4$; c'est une formule de récurrence qui peut être remarquée par des élèves.
- 3. $a(n)$ admet pour fonction génératrice (c'est un résultat récent)

$$g(x) = \frac{1 + x + 2x^2 + x^4}{1 - 3x^3} .$$

- 4. $a(n)$ est le nombre d'éléments des plus grands sous-groupes commutatifs du groupe symétrique S_n. Par exemple lorsque $n = 6$, un des plus grands sous-groupes commutatifs est le sous-groupe engendré par (123) et (456), qui est d'ordre 9.
- 5. $a(n)$ est le plus grand grand nombre de complexité n au sens de la suite A005520. Un nombre a est de complexité n s'il faut au moins n fois le nombre 1 pour écrire a à l'aide de 1, $+$ et $\times$.

Remarques : Si les deux premières propriétés citées sont accessibles aux élèves, les trois dernières ne le sont pas, mais elles montrent cependant la diversité d'objets mathématiques qui peuvent être associées à une même suite.

5 Références

Quelques lectures :

- 1 : Les pratiques du problème ouvert - G. Arsac, M. Mante - Sceren Irem septembre 2007
- 2 : Vrai ? Faux ?... On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3, INRP, Paris, 1999
- 3 : Extrait du rapport calcul : Lire l'extrait