Le Plus Grand Produit

Un énoncé à tout niveau :
Le nombre 23 peut s'écrire de plusieurs façons comme la somme d'entiers : par exemple : $23 = 11+5+7$.
Trouver parmi ces sommes, celle dont le produit des termes est maximum.
Et avec d'autres nombres ?

— Cette situation peut-être utilisée du cycle 3 à l'université. —

Un autre énoncé : Parmi les décompositions additives d'un entier, trouver celle(s) dont le produit des termes est le plus grand.

— Environ deux heures semblent nécessaires pour une mise en œuvre aboutie. —

Retour au Menu Général

La situation en détail

Menu Général de la situation

- Situation mathématique ▸ Voir
- Objets mathématiques potentiellement travaillés ▸ Voir
- Situations d'apprentissage ▸ Voir
- Références ▸ Voir
- Synthèse ▸ Voir
- Situations connexes ▸ Voir

◂ Retour au Menu Général

Situation Mathématique

Étude du produit de nombres entiers à somme fixée.

Retour au Menu du Plus Grand Produit

Suite

Situation Mathématique

Le Plus Grand Produit

Retour aux situations

Menu général de la situation

Situation mathématique

Objets potentiellement travaillés

Situations d'apprentissage

Références

Synthèse

Situations connexes

La solution du problème peut s'exprimer de la façon suivante :

- si le nombre est un multiple de 3, le plus grand produit est obtenu en calculant $3 \times 3 \times \ldots \times 3$ (décomposition en $3 + 3 + \ldots + 3$; par exemple pour 12 le plus grand produit est $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$)
- si le reste du nombre dans la division par 3 est 1 (≪ si le nombre est égal à un multiple de 3 plus un ≫, pour reprendre une formulation fréquente des élèves), le plus grand produit est obtenu en faisant $3 \times 3 \times \ldots \times 3 \times 4$; (décomposition $3 + 3 + \ldots + 3 + 4$, le 4 étant obtenu en ajoutant le dernier 3 et 1 ; par exemple pour 10 le plus grand produit est 36 ; $3 \times 3 \times 4$ ou $3 \times 3 \times 2 \times 2$)
- si le reste du nombre dans la division par 3 est 2 (≪ si le nombre est égal à un multiple de 3 plus 2 ≫), le plus grand produit est obtenu en faisant $3 \times 3 \times \ldots \times 3 \times 2$ (par exemple pour 14 le plus grand produit est $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 = 162$).

Retour au Menu du Plus Grand Produit

Suite

Situation Mathématique

La preuve de cette solution s'appuie sur les propriétés suivantes :

a. si 0 figure dans la décomposition additive, le produit des termes est nul.

b. si 1 figure dans la décomposition additive, le produit des termes est amélioré en ajoutant 1 à un des termes du produit (ex $3 \times 3 \times 4$ au lieu de $3 \times 3 \times 3 \times 1$).

c. si, dans une décomposition additive, tout nombre supérieur ou égal à 5 est décomposé en deux termes supérieurs à 1, le produit de ces 2 termes sera plus grand que le nombre de départ.
En effet, si n est un des nombres de la décomposition, en le remplaçant par $[(n-2)+2]$ on ne change pas la somme, et le produit devient $2 \times (n-2) = 2n - 4 = n + (n-4)$. Or $(n-4)$ est positif si n est supérieur à 4, donc $n + (n-4)$ est supérieur à n, si n est supérieur à 4. Tout nombre n supérieur à 4 (supérieur ou égal à 5) permet d'obtenir un plus grand produit si on le remplace par $2 \times (n-2)$. En appliquant cette propriété, les seuls nombres conservés sont des 3 ou des 2 (puisque $4 = 2x2$).

Expérimenter avec GeoGebra

d. si dans un produit on remplace $2 \times 2 \times 2 = 8$ par $3 \times 3 = 9$, le produit sera plus grand ; donc dès qu'il y a trois 2 dans la décomposition, on remplace $2 \times 2 \times 2$ par 3×3 ; on ne conserve donc parmi les termes du produit que un ou deux 2.

Retour au Menu du Plus Grand Produit

Objets Potentiellement Travaillés

Objets mathématiques susceptibles d'être travaillés

Comme cela a été rapidement évoqué plus haut, ce problème est un problème de recherche. La mise en oeuvre proposée est bien entendue liée à une attitude attendue des élèves et à une volonté du professeur de la faire vivre.

Nous ne développons ici que quelques compétences liées à l'activité de résolution de problème proprement dite (savoir mettre en œuvre une démarche scientifique, savoir oser, réaliser des essais avec ou sans outils, dégager des sous-problèmes, changer de cadres, conjecturer, se poser le problème de la preuve, de la démonstration...).

Concernant les objets mathématiques travaillés, plusieurs sont des objets que l'on peut estimer acquis dès la quatrième, mais certains types de raisonnements permettent d'envisager la mise en œuvre de cette situation à tous les niveaux du lycée, voire au delà.

Retour au Menu du Plus Grand Produit

Suite

Objets Potentiellement Travaillés

Programmes de Cycle3	**Méthodes travaillées**
la pratique des mathématiques développe le goût de la recherche et du raisonnement, l'imagination et les capacités d'abstraction, la rigueur et la précision. Du CE2 au CM2, dans les quatre domaines du programme, l'élève enrichit ses connaissances, acquiert de nouveaux outils, et continue d'apprendre à résoudre des problèmes.	- savoir émettre des hypothèses - savoir formuler précisément des propositions pour pouvoir en débattre - prouver une proposition

Retour au Menu du Plus Grand Produit

Suite

Objets Potentiellement Travaillés

Le Plus Grand Produit

Retour aux situations

Menu général de la situation

Situation mathématique

Objets potentiellement travaillés

Situations d'apprentissage

Références

Synthèse

Situations connexes

Programmes de Cycle3	Objets travaillés
- écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, ... ; - restituer les ≪ tables d'addition ≫ et de multiplication de 2 à 9 ; - utiliser les techniques opératoires des quatre opérations sur les nombres entiers ... ; - calculer mentalement en utilisant les quatre opérations ; - résoudre des problèmes relevant des quatre opérations,..., et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres,...	- 0 élément absorbant de la multiplication - 1 élément neutre de la multiplication - les décompositions additives d'un entier - les tables de multiplications - associativité et commutativité de la multiplication - ... - compréhension des termes ≪ somme ≫ ≪ produit ≫ ≪ termes ≫ ≪ produit des termes de la somme ≫ - raisonnements élémentaires sur les nombres : $1 \times 1 < 2; 1 \times 1 \times 1 < 3$ et $1 \times 2 < 3; 2 \times 2 > 1 \times 3$

Retour au Menu du Plus Grand Produit

Suite

Objets Potentiellement Travaillés

Programmes de Sixième	Objets travaillés
- comparer deux nombres entiers ou décimaux, ranger une liste de nombres. - encadrer un nombre, intercaler un nombre entre deux autres. - connaître les tables d'addition et de multiplication et les résultats qui en dérivent -choisir les opérations qui conviennent au traitement de la situation étudiée. - savoir effectuer ces opérations sous les diverses formes de calcul : mental, posé, instrumenté. - connaître la signification du vocabulaire associé : somme, différence, produit, terme, facteur.	- 0 élément absorbant de la multiplication - 1 élément neutre de la multiplication - les décompositions additives d'un entier - les tables de multiplications - associativité et commutativité de la multiplication - ... - compréhension des termes ≪ somme ≫ ≪ produit ≫ ≪ termes ≫ ≪ produit des termes de la somme ≫ - raisonnements élémentaires sur les nombres : $1 \times 1 < 2; 1 \times 1 \times 1 < 3$ et $1 \times 2 < 3; 2 \times 2 > 1 \times 3$

Retour au Menu du Plus Grand Produit

Suite

Programmes de Cinquième

Comme en classe de Sixième, cette partie du programme (Nombres et Calculs) s'appuie fondamentalement sur la résolution de problèmes.
Ces problèmes, en associant à une situation donnée une activité numérique, renforcent le sens des opérations et des diverses écritures numériques et littérales.
Dans la continuité de ce qui est fait en classe de Sixième, les problèmes proposés sont issus de la vie courante, des autres disciplines ou des mathématiques.

Capacités :

- effectuer une succession d'opérations donnée sous diverses formes (par calcul mental, posé ou instrumenté), uniquement sur des exemples numériques.
- écrire une expression correspondant à une succession donnée d'opérations.
- reconnaître, dans des cas simples, si un nombre entier positif est multiple ou diviseur d'un autre nombre entier positif.

Retour au Menu du Plus Grand Produit

Suite

Objets Potentiellement Travaillés

Programmes de Quatrième et de Troisième

Les objets mathématiques utilisés sont a priori en place dans ces niveaux de classe. Le problème permet alors, à partir de ces objets parfaitement naturalisés de développer les compétences attendues par les programmes :

◂ Retour au Menu du Plus Grand Produit

▸ Suite

Objets Potentiellement Travaillés

. . . ≪ La pratique du calcul numérique (exact ou approché) sous ses différentes formes en interaction (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) a pour objectifs : - la maîtrise des procédures de calcul effectivement utilisées, - l'acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres, - la réflexion et l'initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre suivant la situation. ≫	Attitudes : . . . l'étude des mathématiques au cycle central permet aux élèves d'appréhender l'existence de lois logiques et développe : - le sens de l'observation ; - l'imagination raisonnée, l'ouverture d'esprit ; - . . . - la rigueur et la précision ; - le respect de la vérité rationnellement établie ; - l'esprit critique : distinction entre le prouvé, le probable ou l'incertain, la prédiction et la prévision, situation d'un résultat ou d'une information dans son contexte ; - la volonté de justesse dans l'expression écrite et orale, du goût pour l'enrichissement du vocabulaire ; - la volonté de se prendre en charge personnellement ; - l'ouverture à la communication, au dialogue, au débat ; - l'envie de prendre des initiatives, d'anticiper, d'être indépendant et inventif en développant les qualités de curiosité et créativité.

Objets Potentiellement Travaillés

Le Plus Grand Produit

Retour aux situations

Menu général de la situation

Situation mathématique

Objets potentiellement travaillés

Situations d'apprentissage

Références

Synthèse

Situations connexes

Programmes de Seconde	Objets travaillés
l'organisation de la classe doit permettre aux élèves d'expérimenter les diverses facettes de l'activité mathématique décrites dans l'introduction du programme. Certaines (≪ chercher, trouver des résultats partiels, se poser des questions, expliquer oralement une démarche, rédiger au brouillon puis au propre, (...), accéder au plaisir de la découverte et à l'expérience de la compréhension ≫) renvoient à l'étude de situations et à la résolution de problèmes	compétences méthodologiques complémentaires et en particulier : - raisonnement par disjonction des cas - raisonnement par récurrence - rédaction de la solution au problème posé - interprétation des raisonnements élémentaires sur les nombres ($1 \times 1 < 2; 1 \times 1 \times 1 < 3$ et $1 \times 2 < 3; 2 \times 2 > 1 \times 3$) en terme de forme de la décomposition additive obtenue pour l'entier de départ.

Retour au Menu du Plus Grand Produit

Suite

Objets Potentiellement Travaillés

Programmes de Seconde

Les points suivants peuvent aussi être travaillés au lycée :

- division euclidienne par trois, plus précisément restes dans cette division
- calcul algébrique, plus précisément résolution d'une inéquation du premier degré à une inconnue, et interprétation des solutions en revenant au problème posé
- aspect algorithmique (le plus grand produit $a(n)$ est défini pour $n > 4$ par : $a(n) = 3 \times a(n-3)$)

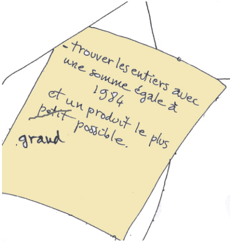
Références

Références :

- Problème ouvert et situation-problème, IREM de Lyon, 1988
- Vrai ? Faux ?... On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3, INRP, Paris, 1999

Retour au Menu du Plus Grand Produit

Situations Connexes



Partons de l'encyclopédie Sloane, sous le nom de A000792 cette page précise quelques propriétés de ce plus grand produit. ▸ Visiter la page du site
Elle cite une dizaine de définitions différentes du nombre $a(n)$ égal au plus grand produit obtenu avec les partitions de n en somme.
Si pour $n = 0$ on pose $a(0) = 1$, alors nous avons la formule de récurrence :
a(n) = max (n-i)a(i) : i<n ; a(0) = 1 .

C'est en fait la définition choisie par l'encyclopédie.

◂ Retour au Menu du Plus Grand Produit ▸ Suite

Situations Connexes

Nous n'allons pas donner toutes les propriétés de cette suite, mais en citer quelques unes :

- 1. $a(n)$ est de la forme $2^p\ 3^q$ avec $p \leq 2$, $q \geq 0$ et $2p + 3q = n$ (résultat attendu du problème de recherche).
- 2. $a(n) = 3 \times a(n-3)$ pour $n > 4$; c'est une formule de récurrence qui peut être remarquée par des élèves.
- 3. $a(n)$ admet pour fonction génératrice (c'est un résultat récent)

$$g(x) = \frac{1 + x + 2x^2 + x^4}{1 - 3x^3} .$$

- 4. $a(n)$ est le nombre d'éléments des plus grands sous-groupes commutatifs du groupe symétrique S_n. Par exemple lorsque $n = 6$, un des plus grands sous-groupes commutatifs est le sous-groupe engendré par (123) et (456), qui est d'ordre 9.
- 5. $a(n)$ est le plus grand nombre de complexité n au sens de la suite A005520. Un nombre a est de complexité n s'il faut au moins n fois le nombre 1 pour écrire a à l'aide de 1, $+$ et $\times$.

Remarques : Si les deux premières propriétés citées sont accessibles aux élèves, les trois dernières ne le sont pas, mais elles montrent cependant la diversité d'objets mathématiques qui peuvent être associées à une même suite.

Situations Connexes

Pour le calcul avec un logiciel de calcul formel, l'utilisation de l'une des propriétés un, deux ou trois mène à des algorithmes faciles à mettre oeuvre, mais celui utilisant la fonction génératrice est très efficace.
Voici un programme (parmi tant d'autres possibles), rédigé en ≪ maple ≫, qui associe à un nombre n, ce plus grand produit $a(n)$.

```
> g :=(1 + x + 2 * x^2 + x^4)/(1 - 3 * x^3) ;
```

$$g : \frac{1 + x + 2x^2 + x^4}{1 - 3x^3}$$

```
> a :=n- >coeff(taylor(g,x,n+1),x,n) ;
a := n- > coeff(taylor(g, x, n + 1), x, n)
> a(19) ;
972
> a(1984) ;
3177518635667711363792844555498219544861461132493203579107637625362740
4960821060576610039283787832931428266521323244723721156317914428437724
4988311735995632575500141058400612452150183699138553890675049111080531
8219123085731135100597534999009190133850815211828342223178118758300099
737727915260234920076636421527860804
```

Enfin, la dernière propriété citée (5.) suggère l'étude du problème connexe :

≪ **Trouver la complexité d'un entier** ≫.