Les tribulations du signe = dans la moulinette de la bonne réponse

Laurent Theis

Editions Bande Didactique

mathèse

Données de catalogage avant publication (Canada)

Theis, Laurent, 1974-

Les tribulations du signe [égal] dans la moulinette de la bonne réponse

(Mathèse)

Dans le titre le mot égal placé entre crochets remplace le signe =.

Présenté à l'origine comme thèse (de doctorat de l'auteur—Université de Sherbrooke), 2003 sous le titre : Étude du développement de la compréhension du signe [égal] chez des enfants de première année du primaire.

Comprend des réf. bibliogr.

ISBN 2-922970-10-8

1. Mathématiques - Notation - Étude et enseignement (Primaire). 2. Mathématiques - Notation. I. Titre. II. Collection.

QA41.T44 2005 372.7'2 C2005-940028-5

Conception : Pierre Huard et les Éditions Bande Didactique

Dépôt légal – 2005
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

ISBN 2-922970-10-8

Imprimé sur les presses de l'Université du Québec à Trois-Rivières

LES TRIBULATIONS DU SIGNE =
DANS LA MOULINETTE DE LA BONNE RÉPONSE

Publication d'une thèse intitulée à l'origine *Étude du développement de la compréhension du signe = chez des enfants de première année du primaire.* Thèse présentée en 2003 à la Faculté d'éducation de l'Université de Sherbrooke en vue de l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph. D.) en Education.

Cette thèse s'est méritée le prix *Dieter Lunkenbein 2004 ex-aequo* décerné par l'Association Mathématique du Québec à la meilleure thèse en didactique des mathématiques soutenue dans une université québécoise durant les années 2002 et 2003.

La thèse soutenue par Laurent Theis a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Sylvain Bourdon
Président du jury

Nicole Nantais
Directrice de recherche

Bernard Héraud
Co-directeur de recherche

Philippe Jonnaert
Évaluateur externe

Hassane Squalli
Évaluateur externe

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier particulièrement Nicole Nantais, ma directrice de recherche. Sans sa franchise, sa disponibilité exceptionnelle, ses encouragements et son encadrement judicieux et compétent, je n'aurais pu mener à terme cette recherche.

Mes remerciements s'adressent également à Bernard Héraud, mon co-directeur de recherche. Tout au long des cinq dernières années, son regard objectif sur mon travail, ses commentaires pertinents et son sens de l'humour ont grandement facilité la poursuite de cette recherche.

Merci également à Philippe Jonnaert, qui a participé au démarrage de ce projet et qui a accepté de faire partie du comité d'évaluation comme membre du jury externe, ainsi qu'à Hassane Squalli, autre membre du jury externe.

Cette recherche n'aurait évidemment pas été possible sans les enfants qui ont accepté de se faire poser de nombreuses questions et de leur enseignante qui m'a ouvert les portes de sa classe. Je les remercie chaleureusement de leur contribution.

Je suis particulièrement reconnaissant envers les membres de ma famille : à Julie, qui m'a toujours encouragé dans les moments les plus difficiles, et à mes parents, et surtout mon père, qui a passé de nombreuses soirées à réviser, avec assiduité et patience, les premières versions de ce document.

Finalement, je remercie le Ministère de la Culture, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche du Luxembourg pour le soutien financier qu'il m'a apporté.

SOMMAIRE

En apprenant le nombre et les premières opérations arithmétiques durant la première année d'études du primaire, de nombreux élèves ont des difficultés à comprendre le signe =. Une grande majorité de ces enfants considère ce symbole, non pas comme un indicateur d'une relation d'égalité et d'équivalence, mais comme un opérateur après lequel il faut écrire une réponse à l'opération qui le précède. Cette représentation, renforcée par la présence prédominante d'équations de structure "a + b = __" dans les manuels de mathématiques, engendre principalement deux types de difficultés : (1) ces enfants n'acceptent souvent pas des égalités non conventionnelles et (2), ils ne sont pas en mesure de compléter correctement des équations qui ne correspondent pas à la structure "a + b = __".

Dans la présente recherche, dont l'objectif principal était de décrire le processus de compréhension du signe = auprès d'élèves de première année du primaire, nous avons enseigné ce symbole à trois enfants dans le cadre d'une expérimentation didactique. Au début de la collecte de données, onze enfants d'une classe de première année de la ville de Luxembourg ont été soumis à un prétest, afin d'évaluer leur compréhension du signe = et de sélectionner trois participants. Par la suite, un enseignement individuel sur le signe = a été dispensé à ces trois enfants.

Plusieurs principes ont servi à l'élaboration des activités d'enseignement. Tout d'abord, les activités s'appuient sur une analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité à l'aide du modèle de Bergeron et Herscovics (1988). Ensuite, lors de l'élaboration des activités d'enseignement, nous avons essayé d'établir un lien entre l'écriture mathématique et la représentation concrète. Dans ce cadre, deux types de représentations ont été considérés, à savoir la comparaison et l'inclusion. Finalement, nous avons travaillé avec les enfants à la fois l'évaluation d'égalités et la détermination d'une inconnue dans une équation. Un post-test, proposant des tâches de nature similaire à celles du prétest, nous a permis de vérifier l'étendue des apprentissages réalisés par les trois participants.

Au cours de notre expérimentation, nous avons pu constater qu'au départ, l'ensemble des enfants auxquels nous avons soumis le prétest considéraient le

signe = comme un opérateur. L'erreur était donc généralisée. Chez ces enfants, la conception erronée avait des répercussions importantes sur le travail avec des structures additives.

À la fin de notre séquence d'enseignement, les trois enfants ont progressé dans leur compréhension du signe =, dont deux enfants de manière importante. Malgré ces progrès, l'apprentissage du signe = constitue un puissant obstacle cognitif : nous avons pu constater chez tous les enfants, à des degrés différents, des tendances à revenir vers une conception du signe = comme opérateur, principalement dans des situations nouvelles. De même, deux des trois enfants n'ont déjà plus obtenu les mêmes performances dans le post-test que vers la fin de la séquence d'enseignement et ce, quelques jours seulement après la fin de l'enseignement du signe =.

Nous avons également pu dégager l'importance d'une compréhension procédurale bien développée pour pouvoir cheminer de manière significative et durable dans l'apprentissage du signe =. Deux indices nous amènent à ce constat. D'abord, l'enfant dont la compréhension procédurale de l'équivalence et de l'égalité était faible n'a pas réussi à construire une compréhension solide du signe = comme indicateur de relation. Ensuite, c'est la diversité des structures additives employées par deux enfants qui leur a permis de progresser de façon durable dans leur compréhension du signe =.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION

Dans le cadre des premiers apprentissages des mathématiques, les relations d'équivalence et d'égalité sont des éléments clés autour desquels les élèves articulent différentes constructions à propos des premiers apprentissages numériques. En apprenant les concepts numériques de base[1] en première année de l'école primaire, les élèves sont rapidement confrontés à des comparaisons de collections et d'équipotence de collections, donc intuitivement à des notions d'égalité et d'équivalence. Un peu plus tard, en découvrant les premières opérations arithmétiques[2], l'équivalence et l'égalité jouent de nouveau un rôle important, notamment dans l'écriture formelle de ces opérations. Ainsi, les équations qui représentent ces opérations s'articulent autour de la relation d'égalité, car, pour qu'elles soient valables, il faut que la même quantité soit représentée des deux côtés du signe =. Ce principe est d'une importance primordiale, puisqu'il s'applique à tous les domaines mathématiques, que ce soit en arithmétique, en algèbre ou en géométrie. L'élève y sera donc confronté tout au long de sa carrière scolaire, et ce même jusqu'à l'université.

Pourtant, l'intérêt consacré jusqu'à présent à l'égalité et à l'équivalence en recherche et en enseignement ne correspond pas nécessairement à leur importance dans l'apprentissage des mathématiques. D'abord, la plupart des enseignants auxquels nous avons parlé de notre recherche semblent ignorer que la compréhension du signe = peut être une source importante de difficultés. Cette impression a d'ailleurs été soulignée par Falkner, Levi et Carpenter (1999), qui ont fait face à l'étonnement des enseignants à qui ils ont proposé d'investiguer la compréhension du signe = de leurs élèves. Ensuite, dans le milieu scientifique, les recherches qui se sont intéressées aux modalités du processus de compréhension de ces relations sont relativement rares. De même, dans les plans d'études du primaire et dans les manuels scolaires, peu d'importance est accordée à ces relations. Or, comme l'ont montré plusieurs études[3], de nombreux élèves du primaire ont une

[1] Il s'agit ici de concepts comme la conservation quantitative, la conservation qualitative ou encore la sériation.
[2] Habituellement, les premières opérations sont découvertes à travers les premières structures additives. Celles-ci nécessitent la maîtrise, notamment de l'équivalence quantitative et des opérations ensemblistes telle la réunion d'ensembles disjoints.
[3] Entre autres Denmark (1976), Behr, Erlwanger et Nichols (1980), Kieran, (1981) et Baroody et Ginsburg (1983)

représentation erronée de l'équivalence et de l'égalité. Cette difficulté persiste souvent jusqu'au secondaire, et l'on peut même encore la constater auprès d'étudiants universitaires.

Nous avons été nous-même témoin de ces difficultés en participant, il y a quelques années, à un projet de recherche qui nous amenait à enseigner les premières notions numériques à des enfants de première année du primaire en difficultés graves d'apprentissage. Dans le cadre d'une des activités, nous nous sommes rendu compte, à notre grande surprise, que la majorité des enfants affirmait, avec une grande conviction, que le signe = sert à séparer une question de la réponse.

Cette conception avait des répercussions importantes sur la performance de ces enfants en mathématiques. Les élèves qui considéraient le symbole d'égalité comme opérateur, c'est-à-dire comme incitateur à fournir une réponse, n'étaient pas en mesure de résoudre correctement certains types d'additions. Ces enfants ignoraient complètement la signification des différents symboles lorsqu'ils étaient en présence d'une équation du type "a=b+__". Par exemple, lorsqu'ils devaient compléter "5 = 2 + __", ils étaient persuadés que l'inconnue correspondait à 7, qui est la somme des deux autres nombres présents dans l'équation. Les difficultés vécues par ces enfants nous ont amené à investiguer plus en profondeur les processus de compréhension qui entrent en jeu lors de l'apprentissage du signe = et des relations d'équivalence et d'égalité qui le sous-tendent.

Dans le cadre de la problématique, nous établissons d'abord la distinction entre les relations d'équivalence, d'égalité et d'équipotence. Par la suite, nous décrivons les conceptions erronées véhiculées par un grand nombre d'élèves au sujet de ces relations et les implications pour les premiers apprentissages mathématiques.

Une deuxième partie fait état de notre cadre conceptuel et des résultats d'une analyse conceptuelle du signe = et des relations d'équivalence et d'égalité qui les sous-tendent.

En ce qui concerne la méthodologie utilisée, nous justifions d'abord le choix d'une expérimentation didactique comme méthode de recherche. Ensuite, nous précisons le type d'expérimentation, et finalement, nous décrivons les modalités selon lesquelles se sont effectuées la collecte de données et les analyses.

La séquence d'enseignement que nous avons construite en prenant appui sur l'analyse conceptuelle du signe = et des relations d'équivalence et d'égalité sera expliquée en quatrième partie.

La présentation des résultats, en cinquième partie, inclut la description des résultats obtenus lors de la collecte de données. Nous y décrivons l'évolution de la compréhension du signe = des enfants tout au long de l'expérimentation.

Finalement, la discussion des résultats sert à établir une synthèse des principaux résultats obtenus à l'issue de la présente recherche. De même, des pistes à poursuivre dans d'autres recherches sont dégagées.

CHAPITRE 1
PROBLÉMATIQUE

1. ÉQUIVALENCE, ÉQUIPOTENCE ET ÉGALITÉ

1.1. Définition

Dans le langage courant, les termes “ équivalent ”, “ équipotent ” et “ égal ” sont souvent utilisés pour désigner une même chose : la même taille, la même apparence ou la même quantité d’objets. D’ailleurs, dans un contexte d’enseignement, on se sert souvent du terme "égalité", mais on parle rarement d’équipotence ou d’équivalence. Pourtant, des différences fondamentales existent entre ces trois relations, qui correspondent toutes à une équivalence : l’équipotence représente un cas particulier de l’équivalence, et l’égalité est un cas particulier de l’équipotence.

Tout d’abord, **l’équivalence** est définie en mathématiques comme toute relation à la fois réflexive, transitive et symétrique. Ces trois propriétés peuvent être expliquées à l’aide de l’exemple de la relation « vient du même pays que. » En effet, cette relation est réflexive puisqu’une personne X vient toujours du même pays qu’elle-même.

Cette relation, comme toute équivalence, est également transitive. En effet, si une personne X vient du même pays qu’une personne Y, et que cette personne Y vient du même pays qu’une personne Z, alors la personne X vient du même pays que la personne Z.

Finalement, la troisième propriété de cette relation est la symétrie, qui est également présente dans notre exemple. Ainsi, si la personne X vient du même pays que la personne Y, alors la personne Y vient du même pays que la personne X.

La relation d’équivalence s’applique ainsi à toutes sortes de relations, pourvu qu’elles soient symétriques, réflexives et transitives. Le contexte mathématique dans lequel l'équivalence est le plus souvent utilisée au primaire est celui de la relation " a le même nombre d'éléments " ou " a le même cardinal que ". On parle alors d'équivalence quantitative.

L'équivalence pouvant être utilisée dans une multitude de contextes, ces derniers doivent être précisés. En effet, deux collections de jetons peuvent être équivalentes, parce qu'elles suivent la relation "sont de la même couleur" ou parce qu'elles ont "le même nombre d'éléments". Il est par conséquent nécessaire de préciser ici s'il s'agit d'une équivalence qualitative, impliquant le critère de la couleur, ou d'une équivalence quantitative.

L'équipotence est une relation d'équivalence particulière. Elle équivaut à la notion d'équivalence quantitative[4] : deux ensembles finis sont équipotents lorsqu'ils ont le même nombre d'éléments. C'est pourquoi, Habran et Linsigh (1979) utilisent le critère de la présence d'une bijection entre deux ensembles pour définir une relation d'équipotence. Dans cette relation, c'est le nombre d'éléments des ensembles qui est déterminant : « Un nombre n est la propriété commune à tous les ensembles équipotents comprenant chacun n éléments. » Ainsi, tous les ensembles comprenant le même nombre d'éléments sont équipotents. Bien sûr, comme l'équipotence est aussi une relation d'équivalence, elle vérifie les propriétés de symétrie, de réflexivité et de transitivité.

La notion **d'égalité** est un cas particulier de l'équipotence. Sur le plan ensembliste, il ne suffit plus que deux ensembles aient le même nombre d'éléments, mais ces éléments doivent, en plus, être exactement les mêmes. Ainsi, Habran et Linsigh (1979, p. 209) expliquent qu'on parle d'égalité entre deux ensembles « si, et seulement si, tout élément de A appartient à B et tout élément de B appartient à A. » Il est donc absolument nécessaire que les deux ensembles contiennent les mêmes éléments. Tout en étant identiques, les mêmes objets physiques doivent être présents dans les deux ensembles. Ceci constitue une différence essentielle par rapport à la relation d'équivalence. En effet, une équivalence doit être réflexive, transitive et symétrique, mais les ensembles en question ne contiennent pas nécessairement les mêmes objets physiques. Une égalité entre deux ensembles

[4] Dans la suite de notre thèse, nous allons utiliser le terme d'"équivalence" pour désigner la relation d'équipotence ou d'équivalence quantitative.

correspond par conséquent à une équivalence quantitative qui répond au critère de la présence des mêmes objets dans les ensembles en question.

C'est également dans ce sens qu'on peut expliquer la signification stricte du symbole " = " (égal), utilisé si souvent en mathématiques. Ce symbole indique une relation d'égalité, puisque, selon Habran et Linsigh (1979, p. 209), il signifie que « placé entre deux termes, (…), ces deux termes désignent un seul et même objet. » Dans le cas de la symbolisation mathématique, ces objets sont des nombres, qui, par définition, désignent la propriété commune de tous les ensembles ayant le même cardinal. Le même objet mathématique, ici le même nombre, est donc représenté des deux côtés du symbole d'égalité.

Nous supposons qu'une des difficultés qu'éprouvent les enfants lorsqu'ils apprennent le signe = réside dans le fait qu'une égalité, au plan formel, peut représenter au plan concret soit une équivalence, soit une égalité. En effet, l'égalité "5 + 3 = 8" peut correspondre à une situation, dans laquelle un enfant avait au départ 5 billes, en a gagné 3 pendant une partie, et en possède maintenant 8. Dans ce cas, on peut également parler d'une égalité au niveau concret, car les 8 billes que l'enfant possède maintenant sont physiquement les mêmes que la réunion des 5 billes qu'il avait au départ et des 3 billes qu'il a gagnées. Par contre, la même égalité pourrait aussi représenter une équivalence au plan concret. Ce serait le cas de deux enfants qui comparent le nombre de billes qu'ils possèdent : un enfant a 5 billes dans sa main droite et 3 billes dans sa main gauche, et l'autre enfant a 8 billes. Dans ce cas, "5 + 3 = 8" ne représente pas une égalité au niveau concret, mais uniquement une équivalence quantitative ou équipotence : les 5 et 3 billes du premier enfant ne sont pas physiquement identiques aux 8 billes du deuxième enfant. Malgré cette différence, on est en présence d'une égalité dans les deux cas au niveau du langage formel, les expressions des deux côtés du signe "=" représentant exactement le même nombre. D'ailleurs l'écriture symbolique de l'égalité "a + b = c" ne permet pas à elle seule de distinguer si on se trouve dans un contexte de réunion ou de comparaison.

Nous n'avons pas trouvé dans les recherches des indices qui permettraient d'affirmer avec certitude que la différence entre l'équivalence et l'égalité influence les difficultés que de nombreux élèves vivent lorsqu'ils apprennent le signe =.

Cependant, comme nous allons le voir ultérieurement, l'analyse de nos données révèle que cette différence peut être un des facteurs qui intervient dans la compréhension du signe = et des relations d'équivalence et d'égalité qui le sous-tendent.

1.2. Significations attribuées sur le plan didactique au symbole '='

Des équations qui s'articulent autour du symbole d'égalité peuvent, au-delà d'une relation d'équivalence quantitative, avoir plusieurs autres significations sur le plan didactique. Ainsi, Baroody et Ginsburg (1983) soulignent que, dans une égalité du type "$a + b = c$", est représentée une combinaison de deux nombres pour en obtenir un troisième. De façon analogue, des égalités du type "$a = b + c$" indiqueraient le fractionnement d'un nombre en deux nombres différents. Il en résulte l'attribution d'un sens d'opérateur au signe = : « In a strictly mathematical sense, "equals" in $4 + 3 = 7$ has only a relational meaning. Psychologically, there is another sense in which the "equals" sign cannot be divorced from the operator view » (p. 210).

Vance (1992) soutient qu'une relation d'équivalence peut indiquer différents noms pour un même nombre. Ceci peut être vrai pour les nombres rationnels, où par exemple 0,4 est une autre dénomination pour 2/5, mais aussi dans des équations qui comprennent des opérations. Ainsi, " 3+4 " serait, d'un point de vue mathématique, une autre dénomination pour " 5+2 ", alors que les deux représentent le nombre 7.

Saenz-Ludlow et Walgamuth (1998), pour leur part, se réfèrent à Freudenthal (1983) pour distinguer cinq différentes significations du symbole d'égalité. Premièrement, dans des équations du type " $a + b = \_\_$ " ou " $a + \_\_ = c$ ", le symbole d'égalité indiquerait pour ces auteurs une commande de trouver le résultat. Une deuxième signification permettrait de désigner l'équivalence des résultats de deux opérations, comme c'est par exemple le cas dans l'égalité " $14 \div 3 = 42 \div 9$ ". Troisièmement, le symbole d'égalité permet de souligner l'équivalence de fractions, comme dans l'égalité $1/2 = 2/4$. La quatrième signification énumérée par ces chercheurs rejoint celle de Vance (1992) décrite dans le paragraphe précédent. Le symbole d'égalité servirait à introduire différents symboles ou différentes écritures pour désigner un même nombre. Finalement, la cinquième signification apparaît par exemple dans l'égalité " $a + b = b + a$ " et désigne la relation de commutativité qui est vraie pour tous les nombres a et b, quelle que soit la valeur numérique qu'on leur assigne.

Cette dernière signification permet aussi de souligner l'importance du symbole d'égalité pour la compréhension des propriétés des différentes opérations arithmétiques de base. En effet, comme dans l'exemple précédent portant sur la commutativité de l'addition, celles-ci indiquent des relations qui sont vraies, quelles que soient les valeurs numériques utilisées. Une conception adéquate du signe "=" comme indicateur d'une relation d'équivalence est donc primordiale pour pouvoir comprendre ces propriétés.

Dans la section précédente, nous avons pu constater que les opérations et leurs propriétés sont étroitement liées à la relation d'équivalence. Or, comme nous allons le montrer plus tard, un grand nombre d'enfants conçoivent le signe = uniquement comme opérateur, et ne comprennent pas sa signification relationnelle, ce qui ne reste pas sans conséquence sur leur compréhension des opérations arithmétiques de base.

2. DE LA PENSÉE FIGURATIVE À LA PENSÉE OPÉRATOIRE

Les notions de pensée figurative et de pensée opératoire, qui ont initialement été introduites par Piaget, désignent deux aspects différents de la pensée. Selon Dolle et Bellano (1989, p. 66), la pensée figurative vise la perception d'états et implique souvent l'image mentale. La pensée opératoire, par contre, est représentée par des transformations, physiques ou mentales, qui sont apportées à ces états. Par conséquent, « la pensée opératoire transforme des états pour en produire d'autres. » (Dolle et Bellano, 1989, p. 67)

La distinction entre une pensée figurative et une pensée opératoire est particulièrement importante lorsqu'il s'agit d'apprendre des opérations mathématiques, puisque ces dernières impliquent des transformations d'états. Ainsi, lors de l'application d'une opération, un état initial est transformé selon la nature de l'opération effectuée. En général, ces transformations sont réversibles. L'addition d'un certain nombre à un autre nombre peut être annulée par la soustraction du même nombre de la somme obtenue.

Pour appréhender ces transformations, la pensée figurative n'est d'aucun secours, puisqu'elle permet uniquement la description des états, mais pas des processus qui les ont transformés. Ici, même l'évocation exclusive des états antérieurs à la transformation n'est pas utile, puisqu'elle ne prend pas en compte les processus ayant mené à l'état final.

Toujours selon Dolle et Bellano (1989), uniquement la pensée opératoire est en mesure de fournir la raison des transformations effectuées et de les annuler, mentalement ou physiquement. Ainsi, un enfant qui fait preuve d'une pensée opératoire face à une transformation ne se limite pas exclusivement à décrire l'état initial, mais il raisonne sur les transformations ayant conduit à l'état final, tout en étant capable d'inverser les transformations apportées. La réversibilité, mentale ou physique, d'une opération constitue par conséquent l'un des plus puissants indicateurs d'une pensée opératoire pour un concept donné chez un individu.

Dans ce cadre, Dolle et Bellano (1989) donnent l'exemple de la conservation de quantités continues pour expliquer la pensée opératoire et la pensée figurative. Ainsi, un enfant, qui affirme qu'une boule de pâte à modeler est devenue plus grande ou plus petite après avoir modifié sa forme fait preuve de pensée figurative. Il en est de même pour un enfant qui, constatant l'équivalence des deux boules, fait uniquement référence à des critères de perception ou évoque simplement l'état antérieur. Par contre, les enfants qui s'appuient sur la réversibilité, c'est-à-dire la retransformation de l'état final à l'état initial, font preuve d'une pensée opératoire.

Bien sûr, la transition d'une pensée figurative à une pensée opératoire se fait graduellement. De même, le diagnostic de pensée opératoire ou figurative ne s'applique qu'à un concept déterminé à la fois. Ainsi, un enfant peut faire preuve de pensée opératoire pour un type de transformations, tout en étant figuratif pour une autre notion. Un individu ne peut donc pas être opératoire ou figuratif en général, mais ces modes de pensée s'appliquent chaque fois à des concepts précis.

Cependant, Dolle et Bellano (1989) soulignent que la situation devient plus inquiétante, lorsque des enfants se sont installés presque exclusivement dans des modes de pensée figurative. On est alors en présence d'enfants " qui n'apprennent pas ", parce qu'ils n'ont pas suffisamment construit la réalité.

3. DES ENFANTS NON OPÉRATOIRES POUR LES OPÉRATIONS DE BASE

Dans la partie suivante, qui constitue la section principale de la problématique de recherche, nous allons faire état de notre analyse de la littérature qui vise, d'une part, à dégager les représentations erronées des enfants à propos des relations d'équivalence et d'égalité et, d'autre part, à déterminer à quel point une compréhension déficiente de la relation d'équivalence peut empêcher des apprenants de développer une pensée opératoire lors de l'apprentissage des opérations de base.

Notre argumentation s'articulera autour de six volets :

1) l'état des difficultés liées à une représentation erronée que beaucoup d'élèves du primaire et du secondaire se font à propos de la relation d'équivalence et la description de l'impact de ces erreurs sur l'apprentissage des opérations de base,
2) l'analyse des relations qui existent entre un manque de compréhension de la relation partie-tout et des difficultés relatives à l'aspect formel de l'équivalence,
3) les difficultés des enfants de passer des opérations concrètes au langage formel,
4) l'influence de la compréhension de la conservation de l'équivalence des opérations qui suit la compréhension de la conservation de l'inéquivalence entre des collections ou des opérations,
5) la présence de pensée figurative chez des enfants qui ont une compréhension incomplète ou déficiente de l'équivalence,
6) la discussion sur la possibilité qu'ont les enfants de comprendre entièrement la relation d'équivalence dès le début de leur scolarisation à l'école primaire.

3.1. Les conceptions erronées et leurs conséquences

Cette section, qui traite des conceptions erronées que beaucoup d'enfants entretiennent au sujet des relations d'équivalence et d'égalité, comprend trois parties : dans la première, nous allons décrire les conceptions les plus répandues, dans la deuxième, nous allons tenter d'établir un lien avec l'absence d'enseignement explicite de ces relations et, dans la troisième partie, nous montrerons l'impact de ces conceptions erronées sur l'utilisation des opérations de base.

3.1.1. Le signe "=" comme incitation à fournir une réponse

L'équivalence, nous l'avons vu, est une relation bien définie en mathématiques, qui se caractérise par les trois propriétés que nous avons décrites antérieurement. Néanmoins, comme le soulignent Davis et Hersh (1981, cités par Saenz-Ludlow et Walgamuth, 1998, p. 154), « alors que les règles du calcul devraient être aussi précises que l'action d'une calculatrice, les règles de l'interprétation ne peuvent pas être plus précises que la communication d'idées entre humains. »

Conformément à ce constat, la représentation mentale que de nombreux élèves ont de l'équivalence et de l'égalité est inadéquate. À travers les recherches que nous avons analysées, la même conception erronée revient régulièrement sous des formes différentes, que ce soit auprès d'élèves de l'école primaire, du secondaire, du collège ou même de l'université : Grand nombre de ces étudiants considèrent le symbole d'égalité, non comme un symbole relationnel, mais comme un opérateur ou une incitation à fournir une réponse.

Ainsi, Behr, Erlwanger et Nichols (1980, p. 13) soulignent que la plupart des enfants du primaire qui ont été interrogés au cours de leur recherche sont d'avis que le symbole d'égalité les incite à fournir la réponse à l'opération qui le précède. Baroody et Ginsburg (1983, p. 199), ainsi que Vance (1998, p. 282) vont dans la même direction, en constatant que le symbole d'égalité est considéré comme signal d'écrire une réponse. Face à ces résultats, on peut dès lors se questionner sur la pertinence de l'enseignement qui a été dispensé à ces enfants en matière de relations d'équivalence et égalité.

Une compréhension lacunaire du symbole d'égalité ne semble pas avoir d'influence sur la résolution d'équations du type " a + b = __ ", dans lesquelles le signe d'égalité précède effectivement l'inconnue. Behr, Erlwanger et Nichols (1976, p. 2) ont constaté qu'une grande majorité des enfants est en mesure de résoudre des équations de ce type.

La même conception erronée apparaît lorsque les participants aux différentes recherches sont confrontés à des égalités moins conventionnelles. Denmark et al. (1976, p. 1), entre autres, soutiennent que de nombreux enfants n'acceptent pas des écritures du type " a = a ". Confrontés à ce type d'équivalence, de nombreux élèves la transforment en une égalité du type " a + 0 = a ". Ils la modifient donc de façon à pouvoir l'adapter au schéma de la question qui précède et de la réponse qui suit le symbole d'égalité.

Dans ce cadre, Behr, Erlwanger et Nichols (1980) distinguent entre des « égalités d'action », qui comprennent une opération et qui représentent l'action d'addition dans un contexte concret, et les autres égalités[5], qui ne contiennent aucune opération ou plusieurs opérations des deux côtés du symbole d'égalité. Un certain nombre d'élèves semblent donc uniquement accepter des « égalités d'action » en modifiant celles qui ne comportent pas d'opérations, afin de les transformer en « égalités d'action ».

Des difficultés peuvent également apparaître lorsque les enfants font face à des équations du type " __ = a + b ". Behr, Erlwanger et Nichols (1980) soutiennent que, dans ce cas, certains enfants inversent le sens de la lecture. Lue de droite à gauche, l'équation est transformée en " b + a = ___ "; on retrouve ainsi la conception de la réponse qui suit la question. Cette stratégie est également mentionnée par Lindvall et Ibarra (1980), lorsqu'ils affirment que, dans des équations de ce type, les enfants ont tendance à d'abord regarder l'opération, pour ensuite dégager la solution.

Bien sûr, on pourrait penser ici que les enfants qui ont recours à cette stratégie d'inversion comprennent d'une certaine manière la symétrie de la relation

[5] Une égalité du type a + b = c est un exemple d'une égalité d'action tandis que des égalités comme a = b ou a + b = c + d n'impliqueraient pas d'action au niveau concret pour ces auteurs.

d'équivalence et de la commutativité de l'addition. Cependant, Behr, Erlwanger et Nichols (1980) soutiennent que les mêmes enfants ont, devant des tâches similaires, tendance à ignorer tout simplement la signification des symboles employés. Par exemple, une des élèves interrogées par ces auteurs inversait, selon les cas, la lecture ou ignorait le sens des symboles impliqués dans l'équation, en transformant "__ = a + b" en "__ + a = b". Nous pouvons donc supposer qu'il s'agit ici d'une mauvaise compréhension du signe d'égalité et non d'une application consciente et justifiée de certaines propriétés de la relation d'équivalence.

Cette hypothèse est confirmée par les difficultés que ces enfants ont lors de la résolution d'autres équations. Ainsi, confrontés à des équations du type "a + b = __ + d", la stratégie utilisée précédemment, qui visait à faire rentrer l'opération dans le schéma d'action des enfants, ne fonctionne plus. Kieran (1981) en conclut que les enfants des premières années du primaire ne sont pas en mesure de résoudre ces tâches de façon adéquate et les refusent en affirmant que ce sont des écritures non acceptables.

Denmark et al. (1976) soulignent que, souvent, les opérations des deux côtés du symbole d'égalité sont considérées comme deux problèmes séparés. En suivant la logique des élèves, les égalités du type "a + b = c + d" ne sont par conséquent pas acceptables, puisqu'on est confronté à deux questions auxquelles aucune réponse n'est donnée. Selon cet auteur, de nombreux enfants transforment des équations comme "2 + 4 = __ + 2" en "2 + 4 = 6 + 2", de manière à ce que la “ réponse ” à la “ question ” "4 + 2" suive directement le symbole d'égalité. D'ailleurs, Saenz-Ludlow et Walgamuth (1998) ont remarqué exactement le même phénomène dans le cadre de leur recherche. Shoecraft (1989) va dans la même direction, en mentionnant que les participants à sa recherche séparent les égalités du type "a + b = c + d" en deux égalités différentes. Ainsi, un de ses élèves a transformé "2 + 7 = 4 + 5" en "2 + 7 = 9" et "4 + 5 = 9", pour obtenir ainsi de nouveau le schéma “ question - réponse ”. Bien sûr, il peut être utile de recourir au total présent des deux côtés pour évaluer une égalité de type "a + b = c + d", mais dans ce cas, l'enfant ne s'est plus préoccupé de l'égalité complète qui lui avait été fournie au départ. Un autre élève écrit, face à la même question, l'égalité suivante : "2 + 7 + 4 + 5 = 18", le signe d'égalité étant de nouveau suivi d'une réponse à une question. Conformément à Saenz-Ludlow et Walgamuth (1998), ces enfants ont donc tendance à utiliser le symbole d'égalité pour séparer les différentes opérations, au lieu d'exprimer une équivalence quantitative. Finalement, Falkner, Levi et Carpenter (1999) ont constaté que, parmi 145 élèves de sixième année du primaire, aucun n'était capable de résoudre correctement l'équation "8 + 4 = x + 5". Tous les enfants interrogés ont fourni une réponse qui permet de conclure qu'ils conçoivent le signe = comme opérateur. D'ailleurs, ces auteurs ont observé exactement le même phénomène lorsque l'équation en question a été posée à une classe de deuxième année du primaire.

Face à ces constats établis par plusieurs chercheurs différents, il faut cependant souligner que des processus plus évolués sont nécessaires pour comprendre des équations du type "a + b = __ + d" que pour celles du type "a + b = __". Alors que les enfants auront probablement peu de difficultés à représenter concrètement la seconde équation, il est moins évident de trouver un exemple concret qui illustre une équation du type "a + b = __ + d". D'ailleurs, dans l'élaboration de notre séquence d'enseignement, nous devrons tenir compte de cette particularité et tenter de trouver des contextes significatifs pour les enfants, qui permettent de solutionner de telles équations.

3.1.2. Origine et évolution des conceptions erronées sur les relations d'équivalence et d'égalité

Les difficultés auxquelles sont confrontés les élèves ne surprennent pas, si on sait que les relations d'équivalence et d'égalité, et surtout leur aspect symbolique, font rarement l'objet d'un enseignement explicite. Plusieurs causes peuvent expliquer la représentation du symbole d'égalité comme opérateur. Weaver (1982, p. 60) constate que, dans beaucoup de manuels de mathématiques de l'école primaire, aucun effort n'est fourni pour expliciter la symbolisation des opérations. De même, les seules opérations proposées sont du type "a + b = __", le symbole d'égalité précédant effectivement la "réponse" à fournir.

L'aspect formel des opérations et le symbole d'égalité sont introduits, selon Labinowicz (1985), par la plupart des enseignants pendant le premier mois de la première année du primaire. Très souvent, cette introduction est effectuée de manière arbitraire, sans que les élèves aient le temps de construire des représentations adéquates de ces symboles. En plus, et Saenz-Ludlow et Walgamuth

(1998) ne manquent pas de le souligner, la compréhension de l'équivalence est un long processus. Par conséquent, il serait tout simplement irréaliste de penser que les enfants peuvent apprendre d'un coup les différentes significations et propriétés de cette relation.

Finalement, Denmark et al. (1976, p. 2) concluent que, dans un programme de mathématiques typique, les élèves n'apprennent tout simplement pas à considérer le symbole d'égalité comme synonyme d'une relation entre deux nombres.

Bien sûr, les travaux mentionnés précédemment ne sont pas tous très récents, et on pourrait penser qu'avec l'introduction de nouveaux manuels au primaire, la signification du signe = est traitée de manière plus explicite. En analysant les manuels de première et deuxième année en vigueur actuellement au Luxembourg et au Québec, on peut constater qu'une plus grande importance est accordée à l'enseignement du signe = dans certains ouvrages, mais qu'en général, cet enseignement est encore très lacunaire. Dans les manuels luxembourgeois par exemple, on traite la signification du signe = uniquement dans le contexte de comparaisons de collections, et conjointement avec les signes > et <. De même, la grande majorité des équations que les enfants ont à travailler correspondent à une structure "a + b = __". Dans les manuels québécois analysés, on retrouve une plus grande diversité d'équations dans la plupart des manuels. Cependant, pour certains auteurs, l'explication du signe = est escamotée. Ainsi, dans le manuel "Clicmaths", Bordier (2001) explique les symboles impliqués dans une égalité à l'aide de l'exemple "2 + 4 = 6", mais omet de clarifier la signification du signe =. « Voici une égalité représentant une addition: 2 + 4 = 6. 2 et 4 sont les termes. 6 est la somme des termes 2 et 4. + est le symbole de l'addition » (vol. A, p. 35). On explique donc explicitement la signification de tous les termes impliqués, sauf celle du signe =.

Ailleurs, c'est carrément une conception du signe = comme opérateur qui est transmise : Lebel (2001) explique ce symbole de la manière suivante aux enfants du premier cycle : « Le signe égal (=) ne sert pas toujours à effectuer un algorithme ou à donner une réponse mathématique. Il peut aussi servir à donner une information » (p. 92). Afin de souligner la dernière partie de l'affirmation, les auteurs de ce manuel fournissent l'exemple suivant : « Voici une suite de nombres :

12, 13, 14, 15, 16. Les nombres pairs = 12, 14, 16. Les nombres impairs = 13, 15. » (p. 92). L'approche utilisée par Lebel (2001) est à dénoncer pour plusieurs raisons. D'abord, une telle explication renforce explicitement une conception du signe = comme opérateur chez les enfants. Ensuite, les exemples fou rnis traduisent peut-être une utilisation commune du signe =, mais qui n'est pas mathématiquement correcte, puisqu'on ne retrouve pas la représentation de la même quantité des deux côtés.

La conception d'une égalité en termes de question – réponse est également véhiculée, de manière moins flagrante par Laurence *et al.* (2000) dans le fasc. 11 de la collection Mosaïque. Dans une des activités, nommée "ça s'équivaut", différentes additions sont écrites. Les enfants doivent alors associer celles qui représentent le même nombre. Cependant, alors que le titre de l'activité parle en termes d'équivalence, les consignes font plutôt référence à une autre conception : « Place les jetons d'une même couleur sur les opérations qui ont le même résultat. »

La conception du signe = comme opérateur semble également être renforcée par un certain nombre d'enseignants. Ainsi, dans une vidéo éditée par Jonnaert (1994) sur l'apprentissage du nombre, on peut voir une enseignante qui travaille avec les élèves sur des égalités de type "a = b + c". Pour ce faire, l'enseignante fait séparer à ses élèves un ensemble d'objets en deux sous-ensembles, et leur demande d'écrire l'égalité correspondante. Lorsqu'un enfant propose une égalité de type "a + b = c", l'enseignante intervient pour obtenir une structure "c = a + b" : « Maintenant, peux-tu me dire le calcul en commençant par la réponse ? » Cette enseignante véhicule donc en même temps clairement une conception comme opérateur du signe =.

Les conceptions des enfants au sujet du signe = ne sont cependant pas uniquement renforcées dans un contexte scolaire. Labinowicz (1985) souligne à ce sujet que, si les équations du type "a + b = __" sont répétées dans les manuels de mathématiques, le même mode d'opération est imposé par la calculatrice. En effet, l'utilisateur entre d'abord une opération à laquelle la calculatrice fournit par la suite une réponse après le symbole d'égalité. Cette disposition pourrait donc également jouer un rôle, lorsque les enfants n'arrivent pas à construire un sens relationnel au symbole d'égalité, mais continuent à le considérer comme incitation à la réponse.

Il est intéressant de constater que les conceptions erronées des enfants sur le signe = sont ancrées très fortement. Elles ne disparaissent pas après la première ou deuxième année d'études, mais se maintiennent souvent jusqu'au secondaire, au collège, voire à l'université. Ainsi, Behr, Erlwanger et Nichols (1976) ont constaté que des élèves de troisième et de sixième année du primaire ont tendance à croire que le symbole d'égalité est un symbole qui précède la réponse à une opération. Par ailleurs, comme le soulignent Bodin et Capponi (1996), une mauvaise conception du signe "=" a été clairement identifiée comme un des facteurs qui causent des difficultés lorsqu'il s'agit d'apprendre l'algèbre au début du secondaire.

Mevarech et Yitschak (1983), pour leur part, ont conduit une recherche sur la manière que des étudiants du collège, dont la plupart avaient déjà suivi des cours d'algèbre, de géométrie et de trigonométrie à l'école secondaire conçoivent le signe =. Suite à un test, administré à 150 étudiants et comprenant des questions à choix multiple, des équations à résoudre et des questions ouvertes, ces auteurs sont arrivés à la conclusion que, si 56 % des participants considéraient le symbole d'égalité comme symbole relationnel, 44 % étaient d'avis qu'il s'agissait d'une incitation à la réponse.

Bien sûr, auprès d'étudiants du secondaire, du collège et de l'université, les conceptions erronées deviennent apparentes dans des situations différentes par rapport à celles utilisées au primaire, mais, fondamentalement, l'erreur reste la même. Ainsi, dans le cadre des cours de didactique des mathématiques que nous avons donnés à l'Université, nous avons observé des étudiants qui résolvent une addition à deux termes comme "$1025 + 315 - 223 = \_\_\_$" en écrivant : "$1025 + 315 = 1340 - 223 = 1117$". Ici, le symbole d'égalité n'est donc pas utilisé comme symbole relationnel, puisque les équivalences écrites ne sont pas correctes. Par contre, ces étudiants ont fait suivre une deuxième " question " à la " réponse " à la première " question ". Bien sûr, l'erreur consiste en une mauvaise utilisation du symbole d'égalité, mais, sans avoir analysé les processus cognitifs de ces étudiants, il serait prématuré de conclure que ces étudiants n'ont pas compris la signification des relations d'égalité et d'équivalence.

3.1.3 Influence des conceptions erronées des enfants sur le traitement des opérations

Dans la section précédente, nous avons montré que les difficultés liées à l'équivalence se manifestent surtout lorsque les élèves sont confrontés à la résolution d'équations qui contiennent des opérations. Dans la section suivante, nous allons montrer comment ces difficultés peuvent également influencer profondément la compréhension des opérations arithmétiques de base.

Selon Lindvall et Ibarra (1980), une représentation adéquate de l'écriture formelle est essentielle pour comprendre des opérations comme l'addition et la soustraction. Bien sûr, cette représentation adéquate implique nécessairement une compréhension du symbole d'égalité comme symbole relationnel qui indique une équivalence quantitative.

Copeland (1974) va dans la même direction lorsqu'il affirme que, pour vraiment comprendre une opération, l'enfant doit appréhender que, par exemple, "1 + 7" est une autre représentation du nombre 8. Il doit donc en même temps saisir que ces deux notions sont équivalentes.

La perception du symbole d'égalité comme opérateur peut engendrer des difficultés importantes lorsqu'il s'agit d'utiliser des opérations arithmétiques de base. Ainsi, dans le cadre d'un projet de recherche auquel nous avons participé, il y a quelques années, en tant qu'assistant de recherche et qui comportait l'enseignement des premiers concepts numériques à des enfants en difficultés graves d'apprentissage, nous avons pu constater qu'une compréhension déficiente de l'équivalence peut engendrer des erreurs dans l'utilisation des opérations. Certains enfants pour lesquels le symbole d'égalité précédait la réponse de l'opération, lisaient l'équation de droite à gauche dans des additions du type "__ = b + c". Or cette stratégie, qui leur avait été suggérée par leur enseignant, constituait une difficulté quasi insurmontable lorsqu'ils étaient en face d'une soustraction du type "__ = b – c". Comme la soustraction n'est pas commutative, le sens de lecture ne peut plus être inversé et les élèves n'arrivaient plus à résoudre correctement cette opération. La tendance d'enfants de lire à l'envers des égalités de type "a = b + c" ne semble par ailleurs pas être un incident isolé. Ainsi, certains des enfants de première et deuxième année auxquels Falkner, Levi et Carpenter (1999), ont proposé l'égalité

"7 = 3 + 4" ont spontanément utilisé cette stratégie. Une stratégie similaire a pu être observée par Carpenter et Levi (2000) dans une autre classe de première année du primaire, dans laquelle des enfants avaient à évaluer l'égalité "2 = 1 + 1".

Lindvall et Ibarra (1980) ont observé un problème analogue, avec à l'origine un manque de compréhension de la relation d'équivalence. Dans le cas concret, certains participants ne sont pas parvenus à représenter concrètement, avec des jetons, l'équation "__ - 4 = 3". En s'en tenant au schéma de la question qui précède la réponse, des élèves l'ont représentée comme étant "4 – 3 = 1". Il ne s'agit pas ici d'une réponse isolée; selon Lindvall et Ibarra (1980), presque tous les enfants qui utilisent la stratégie de lecture de droite à gauche pour l'addition l'emploient également pour la soustraction.

3.2. Difficultés de compréhension de la relation d'inclusion

La non-maîtrise de la relation d'inclusion[6] joue également un rôle important dans l'acquisition de la notion d'équivalence et des opérations. La vérification de la maîtrise de la relation d'inclusion remonte à Piaget (1991), qui a proposé aux enfants une collection de perles en bois, dont la majorité étaient brunes, deux étant blanches. À la question de savoir s'il y avait plus de perles en bois ou plus de perles brunes, trois types différents de réponses ont été donnés par des enfants âgés de cinq à huit ans. Au cours du premier stade, les enfants ont considéré qu'il y avait plus de perles brunes que de perles en bois et n'arrivaient donc pas à saisir la relation d'inclusion entre ces deux ensembles. Au deuxième stade, les participants à cette recherche arrivaient à donner une réponse correcte, mais uniquement après avoir dénombré les deux ensembles. Finalement, les enfants qui se trouvaient au troisième et dernier stade étaient en mesure de résoudre le problème, en appuyant leur justification sur l'inclusion de l'ensemble de perles brunes dans celui des perles en bois.

Cette relation d'inclusion ne se limite cependant pas à des ensembles d'objets concrets, mais elle peut également être appliquée aux opérations formelles. Dans une équation du type "a + b = c", les parts "a" et "b" sont incluses dans le tout "c", et la somme des parts "a" et "b" est quantitativement équivalente à "c". Dans ce cadre, Van Engen et Steffe (cités par Copeland, 1974, p. 116) ont proposé une tâche d'inclusion relative à l'addition de nombres naturels à cent élèves d'une classe de première année de l'école primaire. Ces enfants devaient décider s'ils préféraient deux ensembles de respectivement deux et trois bonbons ou un ensemble de cinq bonbons. Presque la moitié des participants n'étaient pas en mesure de fournir une réponse correcte.

Piaget (1991, p. 238) a conduit une expérience similaire, ayant comme objectif « de voir si un enfant est capable de comprendre l'identité d'un tout au travers des différentes compositions additives de ses parties ». Au terme de cette expérimentation, il a su dégager les mêmes trois stades de compréhension que pour la relation d'inclusion. Dans la tâche prévue par Piaget, visant à demander aux participants s'ils préféraient avoir quatre bonbons le matin et quatre bonbons l'après-midi ou sept bonbons le matin et un bonbon l'après-midi, les enfants ont donc dû établir que les ensembles qui constituent les parts sont inclus dans le même tout. Une première catégorie d'enfants n'a pas reconnu l'équivalence quantitative entre les deux situations; ils ont justifié leur réponse la plupart du temps par la présence d'un grand sous-ensemble dans la deuxième situation. Au cours d'un deuxième stade, les enfants ont commencé par affirmer la non-équivalence des deux additions, toutefois ils ont découvert pendant la manipulation qu'il ne suffisait pas de considérer l'un ou l'autre des sous-ensembles, mais qu'il fallait tenir compte de la réunion de ces sous-ensembles. Au troisième stade finalement, les enfants étaient en mesure de décider tout de suite de l'équivalence des deux sous-ensembles, en s'appuyant sur le fait que c'est la forme de l'expression, et non la quantité qui change.

Cependant, les résultats des recherches de Piaget que nous venons de citer doivent être relativisés. En effet, il serait tout à fait possible que les enfants qui n'ont pas reconnu l'équivalence des deux ensembles aient procédé de cette façon pour des raisons autres que le fait de ne pas avoir compris la relation d'équivalence. Ainsi, d'un point de vue affectif, un enfant pourrait décider qu'il préfère avoir tout de suite

---

[6] Sur le plan ensembliste, on dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tous les éléments de l'ensemble A font également partie de l'ensemble B.

un plus grand nombre de bonbons, au lieu d'attendre l'après-midi pour en avoir une quantité considérable.

De même, les difficultés éprouvées avec l'inclusion ne sont probablement pas les seules sources d'erreurs. Comment expliquer sinon qu'une partie des élèves continue encore au collège ou même à l'université de considérer le symbole d'égalité comme incitateur à fournir une réponse, alors que le concept d'inclusion devrait être acquis depuis longtemps ?

3.3. Difficultés des enfants de passer des opérations concrètes au langage formel

Au-delà des phénomènes décrits précédemment, il semble également que de nombreux enfants éprouvent des difficultés pour passer des opérations concrètes au langage formel. Toutefois, à l'exception des travaux de Piaget (1991), les différentes recherches que nous avons analysées se sont limitées à décrire des difficultés reliées à l'aspect formel des opérations et de l'équivalence. Nous nous sommes donc posé la question de savoir si les difficultés ressenties par les enfants ne pouvaient pas se situer également au niveau du passage des opérations concrètes au langage formel.

Au cours d'une recherche sur la notation arithmétique auprès d'enfants de la première année d'études du primaire, Labinowicz (1985) a constaté qu'une majorité des enfants a tendance à ne pas avoir recours au symbole d'égalité dans leur notation. Sur 33 enfants interrogés, la majorité a su résoudre avec du matériel concret une addition simple du type "$a + b = \_\_$". Quatre enfants seulement ont réussi à écrire une équation complète et correcte. En ce qui concerne les autres, ils n'ont pas utilisé le symbole d'égalité, par ailleurs ; le signe d'addition a manqué en général dans les équations.

Certaines réactions des élèves qui ont participé à la recherche de Behr, Erlwanger et Nichols (1980, p. 15) semblent également indiquer qu'une difficulté majeure se situe aussi au niveau symbolique. Après avoir été confrontés à l'égalité "$4 + 1 = 2 + 3$", certains participants fréquentant la deuxième année d'études ont concédé que les opérations situées des deux côtés du symbole d'égalité équivalent à

5, mais ils n'ont quand même pas accepté cette écriture, puisque « les deux ne vont pas ensemble ».

Le passage d'une situation concrète à une écriture mathématique est également cerné comme élément problématique par Falkner, Levi et Carpenter (1999). En effet, ces auteurs relatent l'expérience d'une enseignante de maternelle qui a demandé à ses élèves de résoudre l'équation "$4 + 5 = \_\_ + 6$", à partir de l'écriture mathématique uniquement. Au départ, tous les élèves étaient convaincus qu'ils devaient insérer 9 à la place de l'inconnue. Cependant, en leur présentant une situation concrète sous forme de comparaison qui correspond à cette équation, une partie des élèves était en mesure de déterminer le nombre d'objets manquants à droite. Par contre, le travail sur la situation concrète n'a pas amené les élèves à modifier leur réponse pour l'écriture.

Deux constats émergent de cette description : des enfants peuvent, dès un jeune âge, développer une certaine compréhension de l'équivalence au niveau concret, les habilitant à rendre des collections égales. Ensuite, ils éprouvent cependant des difficultés à relier une situation concrète à une écriture mathématique, ce qui peut constituer un obstacle à la compréhension du signe =, et ce dès le début de la scolarisation.

Certains indices pourraient amener à la conclusion qu'il s'agit ici d'un problème de notation formelle. Cependant, des problèmes sous-jacents semblent également entrer en jeu, comme le fait remarquer Piaget (1991, p. 244) :

> « On parvient, certes, à faire répéter verbalement, même aux enfants des [premiers] stades […], des formules tirées de tables d'additions toutes faites, telles que $2 + 2 = 4$; $2 + 3 = 5$; $2 + 4 = 6$; etc. Mais on n'obtient une assimilation réelle que si le sujet est capable de concevoir une somme telle que 6 comme une totalité englobant les addendes 2 et 4 à titre de parties et de situer les diverses combinaisons possibles en un groupe de compositions additives. »

Ainsi, des difficultés au niveau de la symbolisation jouent un rôle important dans les difficultés que vivent de nombreux enfants avec les relations d'équivalence et d'égalité, mais elles ne sont pas la cause exclusive du manque de compréhension de cette notion.

3.4. La compréhension de la conservation de l'inéquivalence et de l'équivalence

Dans un travail de recherche portant sur la conservation du nombre, Vilette (1996) a réussi à montrer que la conservation de l'inéquivalence de deux collections précède celle de l'équivalence. Selon ce chercheur, les enfants comprennent d'abord que des ensembles qui ne contiennent pas le même nombre d'éléments restent inéquivalents lorsqu'on y applique des modifications non pertinentes, en ce sens qu'elles n'affectent pas la quantité représentée. Ce n'est que plus tard qu'ils seront en mesure de reconnaître que des collections équivalentes le restent après l'apport de modifications non pertinentes. Vilette (1996) souligne que c'est la compréhension des effets immédiats de l'addition et de la soustraction sur la notion de conservation de l'inégalité qui permet aux élèves de conserver l'inégalité, alors que l'apprentissage de l'addition et de la soustraction comme relations inverses précède la conservation de l'équivalence entre deux collections.

L'expérience menée par Vilette (1996) impliquait 20 enfants âgés de 4 à 6 ans, chez lesquels un prétest avait révélé qu'ils ne conservaient ni l'équivalence, ni l'inéquivalence. Au cours d'une première séance d'entraînement, les participants ont travaillé sur les effets immédiats de l'addition ou de la soustraction d'un élément à une des collections précédemment équivalentes. 18 élèves ont conservé l'inéquivalence, alors que seulement 3 ont conservé l'équivalence. Par la suite, les élèves ont dû argumenter leur réponse en s'appuyant sur l'inéquivalence quantitative des deux collections, et non sur la disposition spatiale de celles-ci, qui suggérait une équivalence.

Selon Vilette (1996, p. 238), cet apprentissage est une conséquence directe de la séance d'enseignement :

> « Il ne fait aucun doute que les enfants conservent l'inégalité numérique parce qu'ils raisonnent sur les effets des transformations additives et soustractives, indépendamment des effets des transformations spatiales non pertinentes. »

Les participants n'ont appris la conservation de l'équivalence qu'après avoir suivi une session d'entraînement sur les effets successifs de l'addition et de la soustraction. Pendant celle-ci, ils étaient supposés apprendre que l'addition et la soustraction sont des opérations inverses. Ils ont dû s'appuyer sur des transformations additives ou soustractives, pour confirmer que, après la soustraction d'un élément à une des deux collections équivalentes, il suffisait d'y rajouter de nouveau un élément pour rétablir l'équivalence.

Au terme de ces séances, l'effet sur la conservation de l'équivalence était moins flagrant que lors de la première expérience, mais il était néanmoins présent. Vilette (1996, p. 257) en concluait que, « bien que l'effet de l'apprentissage soit indubitable, il est moins impressionnant que celui de l'expérience précédente. »

La recherche de Vilette (1996) souligne, une fois de plus, le lien étroit entre l'apprentissage, d'une part, de l'équivalence, et, d'autre part, des opérations. En effet, alors que nous avons su décrire dans les sections précédentes comment le manque de compréhension de l'équivalence entraîne des difficultés majeures lors de l'apprentissage des opérations, Vilette (1996) montre que l'acquisition de la conservation de l'inéquivalence et de l'équivalence passe aussi par la compréhension des opérations.

3.5. Des difficultés avec la réversibilité des opérations

Dans le cadre de cette section, nous allons essayer de montrer que les difficultés que les enfants éprouvent avec les relations d'égalité et d'équivalence sont en relation étroite avec une pensée non opératoire ou figurative pour les quatre opérations arithmétiques de base. À l'aide de quelques exemples, nous allons dégager l'importance de la réversibilité dans les opérations de base et souligner son lien avec la compréhension de l'équivalence.

Comme nous l'avons expliqué dans une des sections antérieures, la capacité de se servir de la réversibilité des opérations est cruciale pour un élève qui fait preuve d'une pensée opératoire pour une notion donnée. Lors de la symbolisation des opérations, la réversibilité est nécessaire dans plusieurs sens. Dans l'égalité "3 + 4 = 5 + 2", par exemple, l'enfant doit d'abord constater que "3 + 4" équivaut au nombre 7, et que par la suite ce nombre peut de nouveau être décomposé en "5 + 2". Comme aucune transformation n'a été appliquée aux quantités représentées, les deux termes sont équivalents. C'est donc uniquement l'expression du nombre qui change, et non le nombre représenté. Des enfants opératoires devraient donc être en mesure d'expliquer qu'en redistribuant les éléments de l'expression "3 + 4", on peut obtenir l'expression "5 + 2". Il s'agit ici d'un processus analogue à celui que nous avons décrit précédemment pour la conservation de quantités continues. En effet, les deux expressions représentent le même nombre, et par conséquent la même quantité, mais avec des écritures différentes. Or, les enfants qui considèrent le symbole d'égalité comme opérateur n'acceptent pas ce type d'équation.

Des capacités analogues sont requises lorsque les élèves font face à des équations, où le symbole d'égalité se trouve à gauche de l'opération, comme c'est le cas, par exemple, pour "5 = 1 + 4". Comme nous l'avons vu dans un des paragraphes antérieurs, une telle égalité peut être considérée comme une décomposition du nombre 5 en deux éléments, à savoir 1 et 4. Des enfants qui considèrent le symbole d'égalité comme incitation à fournir une réponse, transforment cette égalité en "4 + 1 = 5", c'est-à-dire la composition des nombres 1 et 4 pour former le nombre 5. Ils refusent par conséquent le procédé inverse de la composition, c'est-à-dire la décomposition, pour la transformer de façon à ce qu'elle puisse rentrer dans leur conception du symbole d'égalité. Cette façon de procéder pourrait être un autre indice pour une pensée figurative.

L'hypothèse selon laquelle il est nécessaire d'être en mesure de saisir la réversibilité pour comprendre complètement cette équation est d'ailleurs confirmée partiellement par Labinowicz (1985). Parmi les enfants qui acceptaient une écriture du type "a = b + c", certains justifiaient leur affirmation par une équivalence quantitative, alors que d'autres semblaient effectivement reconnaître la réversibilité de la relation entre les différents nombres. Par contre, des élèves qui considéraient le symbole d'égalité comme une incitation à fournir une réponse ne laissaient pas entrevoir une telle compréhension des opérations et des notions de réversibilité sous-jacentes.

Bien sûr, l'importance de la réversibilité ne se limite pas uniquement à l'opération d'addition, mais elle joue un rôle similaire pour la soustraction, la multiplication et la division. Cependant, aucune des recherches que nous avons analysées ne fait explicitement le lien entre une compréhension déficiente de l'équivalence et une pensée figurative pour les opérations. Une vérification empirique semble donc nécessaire pour soutenir notre hypothèse.

3.6. Introduction précoce du symbole d'égalité

Les analyses des recherches sur l'équivalence ont révélé les difficultés rencontrées par un grand nombre d'élèves avec les relations d'équivalence et d'égalité et les conséquences de celles-ci sur la compréhension des opérations. Suite à ces analyses, on peut se poser la question de savoir si les enfants sont prêts, au début de la première année d'études, de comprendre les relations d'équivalence et d'égalité sous tous leurs aspects. Comme, selon Jonnaert (1997), de nombreux enfants ont une compréhension déficiente de l'inclusion des classes à la fin de la première année d'études, nos doutes à ce sujet sont renforcés.

Plusieurs chercheurs ont essayé de remédier aux difficultés décrites précédemment, en organisant des séquences d'enseignement destinées aux premières années de l'école primaire. Celles-ci ont été conçues de façon à favoriser la construction d'une conception opératoire de la notion d'équivalence. Ainsi, Denmark et al. (1976) ont élaboré des activités au cours desquelles son équipe de recherche s'est servie de balances pour permettre aux élèves de représenter et de résoudre différentes opérations d'addition et de soustraction. Les résultats de cette recherche n'ont cependant pas été concluants, au point que Denmark et al. (1976) ont avancé l'hypothèse que des élèves de première année manquent tout simplement de maturité au plan cognitif pour construire le vrai sens du symbole d'égalité. Cependant, il faut noter ici que des activités impliquant des balances permettent uniquement de représenter des contextes de comparaison, qui n'impliquent pas d'inclusions. Au niveau concret, toutes les tâches correspondent donc à des équivalences, des égalités ne pouvant être illustrées à l'aide de balances, puisqu'une égalité implique la présence des mêmes objets physiques.

L'hypothèse de Denmark et al. (1976) a par la suite été contredite par Baroody et Ginsburg (1983). Ils ont explicité à des enfants de la première à la troisième année d'études la signification du symbole d'égalité comme un symbole qui indique la présence de la même quantité des deux côtés de ce signe. La plupart des enfants semblaient accepter des équations qui leur étaient familières, même si elles ne correspondaient pas au type "a + b = c". Par contre, presque la moitié des participants considérait le symbole d'égalité comme opérateur dans des équations qui ne leur étaient pas familières. La recherche de Baroody et Ginsburg (1983) s'est cependant centrée exclusivement sur l'aspect symbolique des relations d'équivalence et d'égalité. Un tel enseignement permet donc d'obtenir des progrès chez la plupart des enfants pour l'écriture des équations, mais il ne permet pas de répondre à la question du passage entre la manipulation d'objets concrets et le langage mathématique symbolique.

Falkner, Levi et Carpenter (1999) ont également constaté auprès d'une classe de maternelle qu'un certain nombre d'élèves est bel et bien en mesure de considérer le signe = comme un indicateur d'équivalence après un enseignement explicite. En effet, lorsque ces chercheurs ont demandé de résoudre une équation non conventionnelle à des enfants de première année, auxquels ils avaient enseigné explicitement la signification du signe = l'année précédente, une partie de ces enfants, mais pas tous, ont utilisé le signe = correctement. Leur enseignement s'est donc avéré efficace pour une partie des élèves, et ce, dès le tout début de la scolarisation.

Un constat analogue se retrouve dans les travaux de Carpenter et Levi (2000), qui ont enseigné la signification du signe = à des enfants de première année. À la fin de l'année scolaire, la plupart de ces enfants de première année ont été en mesure d'employer le signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence dans différents types d'égalités. Cependant, ces auteurs ont constaté que les apprentissages réalisés étaient fragiles et, pour être maintenus, devaient être rafraîchis régulièrement.

Labinowicz (1985) a conduit une recherche similaire à celle de Baroody et Ginsburg, en enseignant le symbole d'égalité à un petit groupe de quatre enfants de la deuxième année du primaire pendant neuf séances d'apprentissage différentes. L'enseignement comprenait à la fois un travail sur des collections concrètes et un apprentissage de la représentation symbolique. Un mois après la fin de cette expérimentation, un post-test révélait que tous les enfants avaient réalisé des progrès en matière de compréhension de l'équivalence, mais que des lacunes importantes subsistaient encore chez certains d'entre eux. Certains acceptaient maintenant des équations du type "a = b + c" et le symbole d'égalité comme symbole relationnel; d'autres par contre continuaient à considérer cette équation en termes de "question – réponse". Il est intéressant de constater que, confrontés à une représentation concrète de l'égalité "8 + 1 = 5 + 4", trois des quatre enfants se trouvaient encore au premier ou au deuxième stade de la compréhension de l'inclusion (Labinowicz, 1985), tels que décrits par Piaget (1991). On peut donc se demander quelle influence ce manque de compréhension de l'inclusion peut avoir sur la conception du symbole d'égalité comme opérateur.

Au terme de la description de ces recherches, la question visant à savoir dans quelle mesure les enfants sont capables de comprendre entièrement les écritures formelles des opérations et de l'équivalence au début des apprentissages numériques reste donc ouverte. En effet, les résultats des trois recherches ne sont pas univoques, et même parfois, se contredisent. Alors que Denmark et al. (1976) mettent en doute la possibilité de faire comprendre l'équivalence en première année d'études, Baroody et Ginsburg (1983) ainsi que Labinowicz (1985) ont pu constater que les participants à leur recherche ont réalisé certains progrès.

4. QUESTIONS DE RECHERCHE ET OBJECTIFS

Suite à la description des différentes recherches qui se sont intéressées à la compréhension des relations d'équivalence et d'égalité, deux constats s'imposent. Tout d'abord, ces recherches ne sont pas très nombreuses, alors que les relations en question occupent une place centrale lors de l'apprentissage des premières structures numériques. Ceci explique d'ailleurs que nos références ne sont pas toujours récentes. Ensuite, la plupart des recherches analysées se limitent au plan symbolique et ne sont pas en mesure de dresser un portrait global du développement de la compréhension dans ce domaine. Même des recherches récentes, comme celle de Saenz-Ludlow et Walgamuth (1998), restent assez limitées.

Considérant ces lacunes, nous sommes en mesure de dégager le problème de recherche ainsi que les questions de recherche qui en découlent. Ainsi, notre problème général peut être décrit comme suit :

Lors des premiers apprentissages numériques, de nombreux enfants ont des difficultés à se construire une conception adéquate des relations d'équivalence et d'égalité ainsi que du signe "=" qui les symbolise.

Le problème spécifique que nous allons aborder est le suivant :

Concernant les processus de compréhension de l'équivalence et de l'égalité lors des premiers apprentissages numériques, de nombreux élèves ont des difficultés avec cette relation, mais les recherches qui pourraient expliquer ces difficultés et décrire comment s'opère ce processus sont rares.

La question générale de recherche qui peut être dégagée de ce problème est la suivante :

Comment se déroule le processus de compréhension des relations d'équivalence et d'égalité ainsi que du signe = qui les symbolise auprès d'enfants de la première année du primaire ?

Afin de trouver une réponse à ce problème spécifique de recherche, nous poursuivons plusieurs objectifs. En effet, nous allons :

- procéder à une analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité afin de mieux comprendre les éléments et les étapes qui interviennent dans l'apprentissage de ces relations,
- dégager comment s'opère et évolue le processus de compréhension de l'équivalence lors des premiers apprentissages numériques auprès d'enfants de trois niveaux différents,
- décrire quelles implications peuvent en découler pour l'élaboration de programmes d'études et de manuels ainsi que pour l'enseignement.

CHAPITRE 2
CADRE CONCEPTUEL

En raison même des objectifs de notre recherche, il nous faut prévoir l'analyse des processus cognitifs mis en jeu lorsqu'il s'agit de construire des relations d'équivalence et d'égalité. Or, jusqu'à présent, les étapes de la compréhension des relations d'équivalence et d'égalité n'ont pas encore été décrites. Afin de comprendre les éléments qui interviennent dans la compréhension des relations d'équivalence et d'égalité, nous avons décidé de réaliser une analyse conceptuelle de ces relations.

Pour effectuer notre analyse conceptuelle, nous avons besoin d'un cadre de référence qui nous permettra de cerner ce processus. Dans le cadre de cette section, nous allons décrire trois modèles de compréhension. Une première partie sera consacrée au modèle en stades de Piaget (1991), qui a été appliqué spécifiquement à la compréhension de l'équivalence. Dans une deuxième partie, nous décrirons deux modèles de compréhension plus généraux, celui de Sierpinska (1995) et celui de Bergeron et Herscovics (1988), retenus parce qu'ils décrivent deux aspects différents, mais complémentaires de la compréhension, soit l'acte de compréhension pour le premier et le processus de compréhension pour le second. De plus, les deux font référence explicitement à la compréhension en mathématiques et pourraient par conséquent être utiles pour notre démarche de recherche. Après avoir présenté ces deux modèles de compréhension, nous allons expliquer lequel de ces modèles a été retenu pour notre recherche et justifier notre choix.

Dans un deuxième temps, il est important de mieux comprendre la structure des tâches que nous allons proposer aux enfants. En effet, les relations d'équivalence et d'égalité ne peuvent pas exister seules, mais désignent une relation entre différents éléments ou nombres. Comme l'équivalence et l'égalité sont essentiellement travaillées à travers des structures additives au début des apprentissages mathématiques en première année du primaire, il faut cerner de quels types d'additions il s'agit. À cet effet, nous allons décrire, dans une dernière partie de cette section, quels types d'additions on peut présenter, en nous référant à la classification de Vergnaud (1997).

1. LE MODÈLE EN STADES DE PIAGET, APPLIQUÉ À L'ÉQUIVALENCE ET L'ÉGALITÉ

Piaget (1991) a investigué la compréhension de l'égalité d'enfants du début du primaire à travers différentes tâches additives. Au terme de ces expériences, il a établi un modèle en trois stades de développement qui décrit les étapes par lesquelles passent les enfants lors de la compréhension de cette relation. Dans ce contexte, Piaget (1991) a essentiellement proposé deux types de tâches aux enfants qui participaient à sa recherche. Dans la première de ces activités, les enfants avaient devant eux deux ensembles contenant chacun un certain nombre de jetons de même dimension. Par la suite, un jeton d'un des ensembles a été enlevé et transféré à l'autre ensemble. Les enfants devaient alors déterminer s'il y avait toujours la même quantité de jetons au total que dans la situation précédente.

Les enfants auxquels cette activité a été proposée ont manifesté trois types de réactions, chacune correspondant à un stade de développement précis. Au cours du premier stade, les enfants n'étaient pas en mesure de percevoir l'égalité numérique entre la situation de départ et la situation finale. Dans leur argumentation, ils s'appuyaient, soit sur l'ensemble qui a perdu un élément pour dire qu'il y avait moins d'éléments en tout, soit sur l'ensemble qui a gagné un élément pour dire qu'il y avait plus d'éléments en tout.

Au deuxième stade, les enfants reconnaissent l'équivalence entre les deux situations. Cette reconnaissance n'est cependant pas immédiate, mais s'installe seulement après une certaine réflexion. Au cours du troisième stade finalement, les enfants sont immédiatement en mesure d'établir un constat d'équivalence entre les deux situations.

Dans un deuxième type de tâche proposé par Piaget (1991), les enfants sont amenés à rendre "égales" deux collections. Dans ces activités, les enfants sont face à deux collections d'objets, dont une a plus d'éléments que l'autre. Les enfants doivent alors rendre égales les deux collections, en transférant des éléments d'une collection à l'autre. Au cours d'un premier stade identifié par Piaget (1991), les enfants ne parviennent pas à rendre égales les deux collections. Généralement, ces enfants ne comprennent pas non plus que, lorsqu'ils ajoutent des éléments à un ensemble en les transférant, l'autre ensemble va perdre le même nombre d'éléments. Le deuxième stade est caractérisé par des comportements qui permettent d'affirmer que les enfants ont compris la réciprocité entre les additions et les soustractions. Cependant, la compréhension des compositions additives se situe encore sur un plan purement intuitif. Finalement, au troisième stade, les enfants sont en mesure de se servir efficacement d'une stratégie de correspondance pour égaliser les deux collections.

Le modèle en stades de Piaget (1991) peut apporter certains éléments intéressants à notre problématique. En effet, il décrit différents types de comportements d'enfants reliés étroitement à la compréhension des relations d'équivalence et d'égalité. Cependant, nous n'avons pas retenu un modèle en stade pour notre analyse conceptuelle. Tout d'abord, ce modèle décrit un aspect particulier de la compréhension de l'égalité et de l'équivalence. En effet, ces deux relations ne sont pas exclusivement apprises dans le contexte du type d'activité présenté, mais se construisent à travers une multitude d'autres situations. Par exemple, l'aspect symbolique de l'égalité et de l'équivalence, qui est au cœur de notre recherche, n'est pas abordé dans ce modèle. Ensuite, ce dernier décrit des comportements d'enfants, mais son utilité pour l'enseignement de l'équivalence et de l'égalité est limitée : il ne donne aucun indice quant aux moyens à employer pour faire avancer la compréhension des enfants.

2. LES MODÈLES DE COMPRÉHENSION GÉNÉRALISTES

Dans le cadre de cette section, nous allons décrire deux modèles de compréhension généralistes en mathématiques, celui de Sierpinska (1995), et celui de Bergeron et Herscovics (1988). Nous allons analyser les deux modèles en fonction de leur utilité potentielle pour notre recherche et justifier le choix de celui que nous allons retenir.

2.1. Le modèle de Sierpinska (1995)

Le modèle de Sierpinska (1995) est un cadre général, qui décrit les différents aspects de la compréhension d'un concept donné. Tout d'abord, cette auteure distingue entre un acte de compréhension, qui est plutôt de courte durée, et le processus de compréhension, qui est plus long et qui comprend plusieurs actes mentaux et représentations. Ce sont essentiellement les actes de compréhension que nous allons traiter dans cette première partie.

Élaborant la définition d'un acte de compréhension, Sierpinska (1995, p. 30) se réfère à une définition qu'Ajdukiewicz avait appliquée à la compréhension d'expressions d'une langue : « Comprendre consiste à relier mentalement l'objet de compréhension à un autre objet. » Un individu aurait donc compris une expression s'il est en mesure de l'associer à un objet différent ou une autre expression qu'il connaît.

Cette première définition d'un acte de compréhension a été modifiée par Sierpinska (1995), afin qu'elle puisse être appliquée aux mathématiques. En effet, cette auteure distingue un objet de compréhension, que l'apprenant essaie de comprendre, et la base de compréhension, sur laquelle l'individu se réfère lors de son acte de compréhension.

En tout, Sierpinska (1995) dégage quatre facteurs différents qui interviennent dans un acte de compréhension, à savoir la personne elle-même, l'objet de compréhension, la base de compréhension et l'opération mentale qui relie l'objet et la base de compréhension.

Quatre opérations mentales interviennent selon ce modèle dans l'acte de compréhension : l'identification, la discrimination, la généralisation et la synthèse. Tout d'abord, l'individu se sert de l'identification pour cerner l'objet de compréhension. Par la suite, il dégage à l'aide de la discrimination en quoi l'objet de compréhension est distinct d'autres objets semblables et, à l'aide de la généralisation, il reconnaît que son objet de compréhension est un cas particulier d'une autre situation. Finalement, la synthèse permet de trouver des principes unificateurs ou des liens entre les généralisations.

Afin que la compréhension puisse avoir lieu, Sierpinska (1995) distingue également plusieurs conditions psychologiques : d'une part, un individu doit faire preuve d'attention lors de son processus de compréhension. Cette condition implique qu'il ait l'intention de comprendre. D'autre part, un questionnement de la part de l'apprenant est nécessaire dans la plupart des cas. Ainsi, Sierpinska (1995, p. 64) concède qu'il peut arriver qu'une compréhension se réalise sans questionnement, mais elle souligne que les raisonnements de longue durée nécessitent toujours un questionnement pour aboutir à la compréhension.

Finalement, Sierpinska (1995) a dégagé quatre critères, qui permettent d'évaluer s'il y a eu compréhension ou non : l'ordre et l'harmonie des pensées, la compréhension fondée sur une pensée unificatrice, la réduction du complexe à plus simple et l'atteinte de l'essentiel des choses.

L'ordre et l'harmonie de la pensée exigent qu'un individu soit capable de ranger l'objet de compréhension parmi d'autres objets semblables. Le sens et la compréhension seraient par conséquent le résultat d'une mise en ordre de la part de la personne en question. Ce critère rejoint en quelque sorte la conceptualisation, telle qu'évoquée par Barth (1993), qui consiste « à construire des catégories en réponse à des expériences » (p. 34). Les objets de compréhension sont rangés dans ces différentes catégories, et on retrouve par conséquent la notion de mise en ordre à laquelle se réfère Sierpinska (1995).

La compréhension fondée sur une pensée unificatrice, pour sa part, exige de l'individu d'être capable de concevoir l'objet de compréhension comme un tout. Cet aspect correspond d'ailleurs au sens étymologique de comprendre qui est « prendre ensemble ».

La réduction du complexe à plus simple est le troisième critère de compréhension selon Sierpinska (1995). Conformément à ce critère, la compréhension impliquerait la réduction de l'objet de compréhension à quelques lois générales.

Finalement, la compréhension serait atteinte si la personne en question a réussi à atteindre l'essence de l'objet de compréhension, celle-ci étant « ce sans quoi (un) objet ne serait pas ce qu'il est. » (Sierpinska, 1995, p. 37). Cependant, ce critère est vague et difficile à opérationnaliser. Sierpinska (1995, p. 34) souligne d'ailleurs qu'il est, comme la pensée unificatrice et la réduction du complexe à plus simple, l'objet de controverses à l'intérieur de la communauté scientifique.

2.2. Le modèle de Bergeron et Herscovics (1988)

Le modèle constructiviste de compréhension en mathématiques de Bergeron et Herscovics (1988) se veut un cadre général qui permet d'évaluer la compréhension de
différents concepts mathématiques. La figure 1 en donne un aperçu.

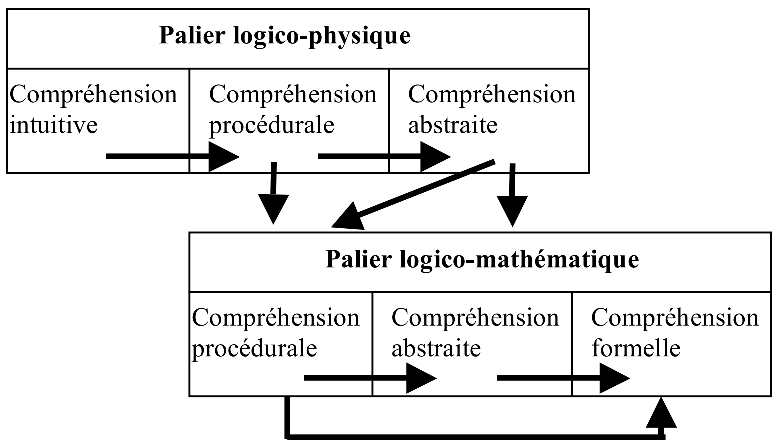


Figure 1 : Le modèle de compréhension de Bergeron et Herscovics (1988)

Une première caractéristique de ce modèle est qu'il distingue deux modes de compréhension différents. Le premier, appelé palier logico-physique, invoque la compréhension des concepts préliminaires à la notion à l'étude. Ici, la compréhension se rapporte souvent à des objets concrets, et elle peut apparaître sous forme intuitive, procédurale ou abstraite. Le deuxième mode de compréhension implique une pensée logico-mathématique, qui permet à l'apprenant de construire de nouvelles connaissances en relation avec la notion étudiée. De même, elle ne porte plus sur des objets, mais nécessite une réflexion au niveau d'une action. Elle peut apparaître sous forme procédurale, abstraite ou formelle.

La compréhension intuitive est la première et en même temps la plus rudimentaire des formes de compréhension dont peut faire preuve un individu. C'est souvent la première idée qu'une personne se fait d'une notion. Lors de la compréhension intuitive, il n'y a pas encore recours à des procédures, et elle est essentiellement basée sur des perceptions visuelles et des estimations globales. Cependant, le caractère rudimentaire de la compréhension intuitive ne diminue en rien son importance dans le processus de compréhension.

La première idée qu'un individu sur une notion évolue par la suite vers une deuxième forme de compréhension, la compréhension procédurale, qui implique l'utilisation de procédures. Ici, l'objet mathématique n'est plus compris à travers des estimations visuelles, mais à l'aide des procédures utilisées.

Ces procédures sont différentes selon que la compréhension se situe au palier logico-physique ou au palier logico-mathématique. Dans le premier cas, la procédure utilisée se réfère encore aux préconcepts, alors que, dans le deuxième, elle fait référence au concept lui-même.

Une troisième forme de compréhension est celle de l'abstraction, grâce à laquelle l'apprenant se détache des procédures. Plusieurs indicateurs permettent de déceler la compréhension abstraite, dont entre autres la construction d'invariants et la réversibilité. Selon l'objet sur laquelle la compréhension porte, elle peut être logico-physique, si elle touche un préconcept, ou logico-mathématique, si elle fait référence au concept à l'étude.

La quatrième et dernière composante de compréhension du modèle de Bergeron et Herscovics (1988), la compréhension formelle, a trait à la symbolisation mathématique. La symbolisation ne se limite pas dans ce contexte à une simple utilisation de formules ou d'équations à résoudre, mais suppose une abstraction préalable. Par sa nature même, ce mode de compréhension ne peut être que logico-mathématique. En effet, le palier logico-physique nécessiterait de travailler sur les propriétés physiques des objets, ce qui n'est pas possible pour la symbolisation.

Dans les recherches qui se sont intéressées à la compréhension des relations d'équivalence et d'égalité, c'est d'ailleurs essentiellement sur le plan de la symbolisation, qui est un des éléments de la compréhension formelle, que les difficultés des enfants se sont manifestées.

Reste à rajouter que le développement de la compréhension des concepts mathématiques ne se fait pas de façon linéaire. En effet, comme l'indiquent les différentes flèches dans la figure 1, les possibilités de passage d'une composante de compréhension à une autre sont nombreuses.

2.3. Critères pour le choix d'un modèle de compréhension

Deux critères sont à la base du choix du modèle de compréhension utilisé pour notre recherche. Tout d'abord le modèle retenu doit être opérationnel, c'est-à-dire qu'il doit pouvoir être utilisé pour réaliser une analyse conceptuelle, et plus spécifiquement celle des relations d'équivalence et d'égalité. De plus, nous avons besoin d'un modèle stable. Dans ce contexte, nous allons vérifier s'il a été utilisé de la même manière dans plusieurs recherches.

2.3.1. Un modèle opérationnel

Le modèle de Bergeron et Herscovics (1988) a été utilisé par de nombreux chercheurs, non seulement dans le domaine de la compréhension des nombres, mais aussi pour d'autres concepts mathématiques, comme la notion d'aire (Héraud, 1991). Il a ainsi servi à établir une analyse conceptuelle de la notion en question et d'élaborer des critères de compréhension et des activités présentées aux participants. Ces faits nous permettent par conséquent d'affirmer qu'il s'agit d'un modèle qui est opérationnel.

Par contre, le modèle de Sierpinska (1995) reste à un niveau théorique et n'a, à notre connaissance, jamais été utilisé concrètement dans une recherche empirique. De même, par sa structure, il serait difficile d'en tirer des critères de compréhension concrets pour un concept déterminé. D'ailleurs, les deux modèles décrivent des aspects de la compréhension complètement différents. Ainsi, celui de Bergeron et

Herscovics (1988) permet d'expliquer la compréhension comme processus à long terme, qui passe par différentes étapes, alors que, dans le modèle de Sierpinska, c'est ce qui se passe à l'instant même de la compréhension d'une notion qui est déterminé. Or, comme nous nous apprêtons à analyser le processus de compréhension des relations d'équivalence et d'égalité à long terme, le modèle de Bergeron et Herscovics (1988) correspond davantage à nos objectifs de recherche.

Ce modèle présente aussi l'avantage qu'il permet d'élaborer des critères de compréhension vérifiables dans des activités présentées aux participants pour un concept donné qui s'appuie sur un préconcept d'ordre physique, ce qui n'est pas nécessairement le cas de celui de Sierpinska (1995).

2.3.2. Un modèle stable

Afin de savoir si le modèle de Bergeron et Herscovics (1988) est utilisé de façon stable à travers les différentes recherches, nous avons procédé à une analyse détaillée des recherches qui s'en sont servies pour l'étude de la compréhension de notions se situant sur le plan numérique, soient celles de nombre, d'addition, de multiplication et de fraction unitaire[7]. Dans ces recherches, nous avons dégagé les critères de compréhension utilisés pour chacune des composantes de la compréhension et analysé les activités qui ont été élaborées à partir de ces critères pour vérifier la compréhension des participants. Cette analyse visait à vérifier la conformité des critères et des activités à la description du modèle et à soulever des caractéristiques communes dans l'utilisation du modèle. Au terme de ce travail, nous avons pu conclure que cette stabilité existe bel et bien. Plusieurs arguments soutiennent cette affirmation.

Tout d'abord, les critères et les tâches que nous avons retrouvés à travers les différentes études répondent aux exigences que nous avons décrites dans la description générale du modèle. Les activités du palier logico-physique concernaient

[7] Les recherches suivantes ont été analysées :

- pour le nombre : Bergeron et Herscovics (1988) ; Herscovics et Bergeron (1988a) ; Herscovics, Bergeron et Bergeron (1987a) ; Herscovics, Bergeron et Bergeron (1987b),
- pour l'addition : Herscovics et Bergeron (1989),
- pour la multiplication : Nantais, Boulet, Bergeron et Herscovics (1989) ; Nantais et Herscovics (1990) ; Beattys, Herscovics et Nantais (1990) ; Francavilla (1993),
- pour les fractions unitaires : Boulet (1993).

exclusivement le préconcept et celles du palier logico-mathématique abordaient par la suite le concept à l'étude en tant que tel. De même, à l'intérieur des différents modes de compréhension, les critères établis dans la description générale du modèle ont été respectés et appliqués d'une façon similaire à travers toutes les recherches.

Certaines particularités se retrouvent également à travers toutes les recherches qui ont été prises en compte dans le cadre de notre analyse. Ainsi, nous avons pu y déceler une forte ressemblance entre la structure des critères et des activités de la compréhension intuitive et de la compréhension procédurale logico-physique. Un phénomène similaire peut être observé entre les deux paliers de la compréhension abstraite.

Cette stabilité de la méthode utilisée aura l'avantage de nous permettre de dégager une méthode rigoureuse pour l'élaboration des critères de compréhension et des tâches correspondantes. Par rapport à d'autres modèles, comme celui de Sierpinska (1995), qui n'ont pas encore été appliqués à des concepts numériques, celui de Bergeron et Herscovics (1988) présente deux avantages majeurs. Tout d'abord, l'analyse conceptuelle que nous allons élaborer pour les relations d'équivalence et d'égalité en sera largement facilitée. Ensuite, la rigueur dans l'élaboration des différents critères de compréhension de la recherche permettra de soutenir la crédibilité de notre recherche.

2.4. Choix du modèle de compréhension

Pour notre projet de recherche, nous avons décidé de nous servir du modèle de Bergeron et Herscovics (1988), et non de celui de Sierpinska (1995) comme cadre de référence. Plusieurs raisons plaident en faveur de ce choix. Tout d'abord, nous venons de voir que le modèle de Bergeron et Herscovics (1988) est opérationnel et que nous pouvons l'utiliser pour réaliser une analyse conceptuelle de l'équivalence et de l'égalité. Ensuite, la stabilité de ce modèle nous facilitera l'analyse, tout en assurant sa rigueur.

Le modèle de Sierpinska (1995) aurait certes pu être intéressant sur un plan strictement conceptuel. Or, nous ne l'avons pas retenu pour deux raisons : il ne permet pas de cerner le processus de compréhension, et nous ne pouvons pas nous en servir pour l'analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité.

3. LA CLASSIFICATION DES STRUCTURES ADDITIVES DE VERGNAUD

Dans le cas de l'addition, les procédures nécessaires pour aboutir à une égalité numérique peuvent être utilisées dans trois contextes différents, distingués par Vergnaud (1997) : l'augmentation d'une quantité donnée, la réunion et la comparaison[8]. Par la suite, nous allons décrire en quoi consistent ces trois contextes et définir les procédures impliquées lors de la compréhension procédurale logico-mathématique de l'égalité pour chacun d'entre eux.

Un contexte additif comprenant l'augmentation d'une quantité donnée consiste, comme le mentionne Vergnaud (1997, p. 152), en une « opération unaire, non commutative, dans laquelle le temps n'intervient pas : il y a un état initial, une transformation et un état final. » Fayol (1990, p. 150) parle dans ce contexte de « la survenue d'au moins une transformation "temporelle", appliquée à un état initial et aboutissant (ou ayant abouti) à un état final. »

Une addition, qui correspond à une structure d'augmentation de quantité donnée, représente toujours une égalité au plan concret. Prenons l'exemple suivant pour illustrer ce constat : « un enfant a cinq billes, en jouant il en gagne trois, combien en a-t-il maintenant ? ». Dans cet énoncé, les billes représentées par cinq et trois et celles représentées par huit sont physiquement les mêmes. En effet, les huit billes de l'état final comprennent les cinq billes de l'état initial et les trois billes qui ont été ajoutées.

Un deuxième contexte dégagé par Vergnaud (1997, p. 151) est celui de la réunion de deux ensembles disjoints. L'énoncé suivant est cité en guise d'exemple : « trois garçons et quatre filles sont réunis pour l'anniversaire de Marie ; combien cela fait-il d'enfants en tout ? » Selon ce même auteur, le contexte de la réunion « peut être représenté par une loi de composition binaire, commutative (et associative) dans laquelle le temps n'intervient pas, puisque garçons et filles sont présents simultanément » (*Ibid.*, p. 151). Tout comme pour l'augmentation d'une

[8] Contrairement aux trois modèles décrits précédemment, la classification de Vergnaud (1997) n'est pas un modèle de compréhension. Cette classification traite de structures mathématiques, et plus spécifiquement des

quantité donnée, un contexte de réunion correspond à une égalité au plan concret. Ici encore, l'ensemble des sept enfants comprend les trois garçons et les quatre filles.

Finalement, le dernier contexte dont parle Vergnaud (1997) est celui de la comparaison additive, qui implique la présence de deux ou plusieurs ensembles, dont le nombre d'éléments est comparé. L'énoncé suivant est un exemple d'un contexte de comparaison : « X a 6 billes. Y a 9 billes. Combien Y a-t-il de billes de plus ? » Au plan concret, cet énoncé correspond à une équivalence, mais pas à une égalité : les 6 billes d'un enfant ainsi que les 3 qu'il en a de moins ne sont pas physiquement les mêmes que les 9 billes de l'autre enfant. En effet, "6 + 3" et "9" représentent des ensembles qui ont le même nombre d'éléments, mais qui sont distincts.

La résolution des différentes structures que nous venons de présenter ne fait pas référence au même degré de difficulté. Ainsi, Fayol (1990) soulève que, dans une augmentation d'une quantité donnée, la recherche de l'état final est comprise très rapidement par les enfants, souvent dès l'école maternelle. Par contre, la recherche de l'état initial s'avère beaucoup plus difficile et constitue « un obstacle quasi insurmontable, au moins pour les plus jeunes ; il faut attendre le CE1 (2e primaire) pour relever un taux de réussite plus élevé. » (*Ibid.*, p. 156). On retrouve une situation analogue dans les énoncés sous forme de réunion, pour lesquels Fayol (1990) soulève que ceux qui impliquent une inconnue sur le tout sont plus faciles à résoudre que ceux qui leur demandent de déterminer combien il y a d'éléments dans un des sous-ensembles. Toujours selon Fayol (1990), la résolution d'énoncés qui traduisent un contexte de comparaison est en général plus difficile que lorsqu'il s'agit de travailler sur un contexte qui implique une réunion ou une augmentation d'une quantité donnée. Cependant, la place de l'inconnue dans un énoncé de type comparaison n'influence pas de manière significative le degré de difficulté d'un problème de type comparaison.

Les résultats des recherches sur la difficulté des énoncés doivent cependant être relativisés. En effet, les auteurs qui ont mesuré les différents degrés de difficulté ont utilisé des énoncés écrits, à partir desquels les participants devaient trouver

---

contextes qui peuvent être représentés par une addition, mais ne décrit pas nécessairement la compréhension de ces structures.

l'inconnue. Les structures présentées ne sont donc pas immédiatement accessibles aux enfants. Dans ce contexte, Baffrey-Dumont (1996, p. 325) parle d'une structure cachée : « La structure proposée de l'énoncé constitue la structure de fond du problème, le volet non visible de l'opération. C'est en quelque sorte la partie masquée de l'iceberg. »

C'est la raison pour laquelle, dans notre recherche, les différentes tâches sont présentées sous forme de représentations concrètes, et les enfants n'ont pas besoin de faire la transition entre le problème écrit et la situation concrète. Prenons comme exemple une activité de structure comparative, avec l'inconnue sur la différence. Pour Fayol (1990, p.151), cette structure est présentée, par écrit, de la manière suivante : « X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y ? ». Un enfant qui doit résoudre cette activité doit donc trouver, à partir de l'énoncé écrit, l'écart entre les deux ensembles.

Dans le cadre de notre recherche, la présentation d'une structure similaire se ferait de manière différente. En effet, pour représenter cette structure, nous présentons à l'enfant deux ensembles de cinq et huit jetons respectivement. L'enfant doit alors déterminer combien d'éléments il doit ajouter au plus "petit" des ensembles pour que la même quantité présentée soit la même des deux côtés. Cette tâche constitue toujours une comparaison, puisque deux ensembles distincts sont présents. Par contre, deux différences la distinguent de la tâche proposée par Vergnaud (1997). Tout d'abord, nous demandons à l'enfant de transformer un ensemble pour le rendre équipotent à l'autre, tandis que Vergnaud (1997) incite les enfants à trouver l'écart entre les deux ensembles. Il est également moins difficile à traiter que l'exemple cité par Fayol (1990), puisque l'enfant a déjà devant lui la représentation concrète. Il n'a donc pas besoin de construire lui-même cette représentation à partir de l'énoncé écrit.

De plus, la classification de Vergnaud (1997) ne tient compte que des additions de type "a + b = c". Or, d'autres types d'opérations peuvent également représenter des situations sous forme de comparaison ou de transformation. Par exemple, une égalité de type "a = b + c" peut correspondre au plan concret à au moins deux situations différentes. Dans un premier cas de figure, un ensemble A est divisé en deux sous-ensembles, B et C. On est alors en présence d'une transformation qui correspond à une égalité au plan concret : les éléments de l'ensemble A sont exactement les mêmes que ceux des ensembles B et C. Une deuxième situation, un ensemble A pourrait être comparé à la réunion de deux autres ensembles, B et C. La structure de la représentation correspondrait alors à une comparaison et on serait en présence, au plan concret, d'une équivalence, mais pas d'une égalité : les éléments de l'ensemble A ne sont pas exactement les mêmes que ceux des ensembles B et C.

Par ailleurs, des additions de type "a + b = c + d" peuvent également faire appel à deux types de représentations concrètes distinctes. Dans la première, qui répond à une structure de transformation, la situation de départ comprend deux ensembles, A et B. Un ou plusieurs éléments sont alors transférés de l'ensemble A à l'ensemble B, de manière à obtenir les deux ensembles C et D. On serait alors en présence d'une égalité au plan concret, puisque les éléments des ensembles A et B sont les mêmes que ceux des ensembles C et D.

Un deuxième type de représentation correspond à une structure de comparaison. La réunion de deux ensembles, A et B, y est comparée à la réunion de deux autres ensembles, C et D. Au plan concret, il s'agit d'une équivalence, mais pas d'une égalité, puisque les ensembles A et B comprennent des éléments différents de ceux des ensembles C et D.

La classification de Vergnaud (1997) comprend donc certaines limites dans le cadre de notre recherche. Elle a été conçue pour le travail sur des problèmes écrits, et pas nécessairement dans un contexte d'enseignement des relations d'équivalence et d'égalité. De plus, le nombre de structures additives qu'on y retrouve est restreint.

Malgré ces limites, la classification de Vergnaud (1997) est utile pour notre recherche à plusieurs niveaux. D'abord, il nous a permis de distinguer entre deux types de structures additives : celles qui représentent une transformation ou une réunion et qui correspondent à une égalité au plan concret et celles qui représentent une comparaison et qui correspondent à une équivalence au plan concret. Nous allons donc nous inspirer de ces deux contextes distincts pour construire les activités qui seront présentées aux enfants, tout en introduisant des structures de type "a = b + c" et "a + b = c + d" correspondant à ces deux contextes. De plus, la classification de Vergnaud (1997) nous permet de comprendre comment on peut obtenir des tâches qui présentent différents degrés de difficulté pour les enfants en fonction de la place de l'inconnue dans l'équation.

4. ANALYSE CONCEPTUELLE DES RELATIONS D'ÉQUIVALENCE ET D'ÉGALITÉ

Comme nous l'avons mentionné antérieurement, l'analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité se réalisera à l'aide du modèle constructiviste de compréhension de Bergeron et Herscovics (1988). Dans une première étape, cette analyse dégagera des critères de compréhension de l'équivalence et de l'égalité pour chacun des différents modes de compréhension invoqués par le modèle. Ces critères serviront, dans une deuxième étape, à élaborer différentes activités relatives à l'apprentissage des relations d'équivalence et d'égalité. Les activités ainsi mises sur pied seront utilisées dans la séquence d'enseignement ainsi que dans les prétest et post-test qui auront lieu respectivement avant et après l'expérimentation en tant que telle.

Au début des apprentissages scolaires, l'équivalence et l'égalité sont travaillées essentiellement à travers les petits nombres et les premières structures opératoires, comme l'addition et la soustraction. Ainsi, au moment où nous allons intervenir auprès des participants, ceux-ci auront déjà commencé à travailler sur le nombre et les premières structures additives.

Dans le contexte de l'analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité, nous avons par conséquent décidé de déterminer les critères de compréhension de l'égalité et de l'équivalence par rapport à des notions de nombre et d'addition. À cet effet, nous avons repris différentes recherches (Herscovics et Bergeron, 1989, Herscovics, Bergeron et Bergeron, 1987a, Herscovics, Bergeron et Bergeron, 1987b, Bergeron et Herscovics, 1988), qui ont établi des analyses conceptuelles du nombre et de l'addition et qui les ont expérimentées et validées auprès d'un certain nombre d'enfants.

Ces analyses conceptuelles ne sont certes pas centrées sur l'équivalence et l'égalité, puisque tel n'était pas leur objectif. Par contre, les relations d'équivalence et d'égalité influencent nécessairement ces analyses, puisque l'apprentissage du nombre ainsi que des premières opérations de base fait intervenir ces relations. Dans le cadre de l'analyse de l'équivalence et de l'égalité, nous allons donc analyser en détail ces recherches sur la compréhension du nombre et de l'addition et en dégager des conclusions quant aux critères de compréhension pour l'équivalence et l'égalité.

Dans cette section, nous allons décrire et justifier les critères de compréhension que nous avons retenus pour l'équivalence et l'égalité. Dans une première partie, nous allons expliciter les principales différences entre le palier logico-physique et le palier logico-mathématique dans notre analyse conceptuelle. Dans une deuxième partie, nous allons revenir plus en détail sur les critères de compréhension retenus pour chacun des modes de compréhension.

4.1. Les différences entre les paliers logico-physique et logico-mathématique

Alors que le palier logico-physique implique une compréhension de l'équivalence de collections d'objets concrets, les critères de compréhension du palier logico-mathématique nécessitent la compréhension de l'égalité numérique. Dans le cadre de cette section, nous allons décrire en détail chacun des deux paliers et expliciter en quoi consistent les différences entre ceux-ci dans le contexte d'une analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité.

4.1.1. Compréhension de l'équivalence de collections sur le plan logico-physique

Le palier logico-physique nécessite, comme nous l'avons vu lors de la description de notre cadre conceptuel, la compréhension d'un prérequis au concept étudié. Souvent, dans les modes de compréhension qui se situent au palier logico-physique, l'enfant s'appuie sur des objets concrets dans son raisonnement. Ainsi, dans les analyses conceptuelles sur la compréhension des petits nombres, les auteurs du modèle soulignent que c'est la notion de quantité comme pré-concept du nombre qui est comprise au palier logico-physique. Dans les tâches proposées pour les différents modes de compréhension, l'enfant doit comparer deux collections pour déterminer si elles sont équivalentes. Pour ce qui est de la compréhension intuitive, ce constat se base sur des perceptions visuelles. Lors de la compréhension procédurale logico-physique, ce sont des procédures mathématiques, comme la correspondance terme à terme, qui permettent d'établir l'équivalence entre les collections. Finalement, la compréhension abstraite logico-physique permet de cerner si l'équivalence est maintenue lorsque des modifications non pertinentes, c'est-à-dire qui ne changent pas la quantité représentée sont apportées à un des ensembles représentés.

Les critères de compréhension pour le palier logico-physique dans le contexte de l'addition sont similaires à ceux du nombre, mais se retrouvent dans des situations additives. Dans les tâches respectives, on demande aux enfants de rendre des collections équivalentes. Dans ce contexte, la compréhension intuitive s'appuie sur des perceptions visuelles alors que la compréhension procédurale nécessite des procédures mathématiques pour rendre équivalentes les collections en ajoutant un certain nombre d'éléments à l'une d'entre elles. De même, la compréhension abstraite logico-physique traite du maintien de l'équivalence si des modifications non pertinentes sont apportées à un ou plusieurs des ensembles impliqués.

Comme on peut le constater, toutes ces tâches se situent au niveau de l'équivalence de quantités, puisqu'elles demandent aux enfants d'avoir recours à des objets concrets afin de déterminer si deux ou plusieurs collections ont autant d'éléments. Par contre, ces objets n'ont pas nécessairement besoin d'être exactement les mêmes. On ne parle donc pas nécessairement d'une égalité, qui est, comme nous l'avons vu antérieurement, un cas spécial de l'équivalence.

4.1.2. Compréhension de l'égalité sur le plan logico-mathématique

Selon la description du palier logico-mathématique, la compréhension à ce niveau implique le concept étudié en tant que tel. Ainsi, dans les recherches sur la compréhension du nombre, ce dernier apparaît exclusivement au palier logico-mathématique. Lors de la compréhension procédurale, il s'agit de se servir de procédures mathématiques afin de déterminer quel nombre est représenté. L'invariance du nombre lors de transformations non pertinentes est un des principaux critères pour la compréhension abstraite logico-mathématique, alors que l'écriture des nombres relève de la compréhension formelle.

Comme pour le palier logico-physique, les critères pour la compréhension de l'addition sont semblables à ceux des premiers apprentissages numériques dans le sens qu'ils font également intervenir le nombre. Ainsi, la compréhension procédurale logico-mathématique demande aux enfants d'arriver au même nombre d'éléments que dans une collection de référence, alors que la compréhension abstraite logico-mathématique implique l'invariance du nombre par rapport à des transformations non pertinentes dans des situations additives. Finalement, la compréhension formelle fait entre autres référence à l'écriture de différentes équations et égalités contenant des additions.

Au palier logico-mathématique, dans les critères de compréhension du nombre et des additions, ce sont donc les nombres, et par conséquent des égalités numériques, qui sont au centre de l'intérêt. En effet, dans chacune des différentes tâches, l'enfant effectue un raisonnement au niveau du nombre. Dès lors, il doit déterminer si le même objet, dans ce cas le même nombre, caractérise différentes collections dans des situations variées. On parle dès lors de la présence d'une égalité, puisque, en plus de la présence de la même quantité qui caractérise une équivalence quantitative ou équipotence, le même objet mathématique est visé.

Dans ce contexte, il est important de ne pas confondre une égalité numérique et l'écriture symbolique de cette égalité. Ainsi, la compréhension procédurale et abstraite implique que l'enfant décide s'il y a présence du même nombre dans différentes situations. Cependant, ce n'est que plus tard, dans le contexte de la compréhension formelle, que ces relations seront écrites, à l'aide de symboles représentant les nombres impliqués, les opérations et l'égalité entre les différents termes.

4.2. Les critères de compréhension retenus pour les différents modes de compréhension

4.2.1. La compréhension intuitive

La compréhension intuitive, qui, de par sa nature, apparaît uniquement au palier logico-physique, est la première et en même temps la plus rudimentaire des formes de compréhension. Le plus souvent, elle s'appuie sur des perceptions visuelles et n'implique pas encore l'utilisation de procédures.

Dans le contexte de la compréhension de l'équivalence et de l'égalité, qui nous intéresse, ceci implique par conséquent qu'un individu qui fait preuve de compréhension intuitive de ces relations sait discerner, en se fiant à des perceptions visuelles, si deux quantités sont à peu près équivalentes.

Les recherches qui ont développé et expérimenté les analyses conceptuelles du nombre ont retenu trois critères. Tout d'abord, un enfant qui a une compréhension intuitive du nombre a acquis la notion de quantité comme pré-concept du nombre. Ensuite, il est en mesure d'attribuer correctement leur sens aux mots « plus que », « moins que » et « pareil à ». Finalement, il sait évaluer, en s'appuyant sur des estimations visuelles, si deux ensembles sont équivalents ou non, et, le cas échéant, dans lequel des ensembles il y a plus ou moins d'éléments. Les activités destinées à vérifier ce dernier critère impliquent des quantités élevées d'objets de façon à ce que les enfants ne puissent pas avoir recours à des procédures mathématiques.

Quant à la compréhension de l'addition, Herscovics et Bergeron (1989, p. 156) soulignent que la compréhension intuitive se manifeste à travers deux critères différents : Celui de « se baser sur la perception visuelle globale pour former un tout par l'ajout d'éléments à un ensemble donné » et celui de « se baser sur la perception globale pour former un tout par la réunion de deux ensembles ». Dans les tâches correspondant au premier de ces critères, les enfants doivent ajouter un certain nombre de billes à un autre ensemble afin que l'ensemble ainsi formé soit à peu près équivalent à un ensemble donné. Les activités relatives au deuxième critère demandent aux enfants de choisir parmi une série d'ensembles ceux qui, réunis ensemble, équivaudront à peu près à un ensemble donné. Tout comme pour les activités relatives à la compréhension du nombre, la quantité d'objets impliqués dans ces tâches est élevée. Les enfants ne peuvent donc pas se servir de procédures mathématiques.

L'analyse des critères retenus par les auteurs du modèle pour la compréhension intuitive du nombre et des additions révèle que ceux-ci impliquent étroitement l'équivalence quantitative. En effet, il s'agit dans chacune des tâches à comparer deux ensembles selon leur équivalence ou inéquivalence quantitative.

Dans un contexte de compréhension des relations d'équivalence et d'égalité, nous pouvons par conséquent reprendre intégralement les critères avancés pour la compréhension du nombre et des premières structures additives :

a) estimer, en se basant sur une perception visuelle, l'équivalence entre deux collections,
b) se baser sur une perception visuelle pour rendre un ensemble équivalent à un ensemble de référence,
c) se baser sur une perception visuelle pour former un ensemble équivalent à la réunion de deux ensembles.

4.2.2. La compréhension procédurale

Conformément à la définition attribuée généralement à la compréhension procédurale, les tâches qui visent à vérifier celle-ci font pour la première fois intervenir des procédures lors de la résolution de la tâche. Cependant, la nature des procédures utilisées varie selon qu'il s'agit de vérifier l'aspect logico-physique ou logico-mathématique de la compréhension procédurale. Ainsi, dans le contexte de la compréhension des relations d'équivalence et d'égalité, l'enfant utilise des procédures mathématiques afin de déterminer si la même quantité d'objets est présente dans deux ou plusieurs collections. Au palier logico-mathématique, des procédures différentes permettront de juger de l'égalité numérique dans diverses situations.

4.2.2.1. La compréhension procédurale logico-physique

Contrairement aux activités reliées à la compréhension intuitive, le raisonnement de l'enfant ne se base plus ici sur une perception visuelle, mais sur une première procédure. Or, au palier logico-physique, celle-ci ne concerne pas encore l'égalité numérique, mais plutôt l'équivalence de collections, qui en est en quelque sorte un pré-concept. De même, les recherches sur l'apprentissage des petits nombres et de l'addition font utiliser des correspondances terme à terme afin de permettre aux enfants de résoudre les activités proposées sans avoir recours au comptage.

En général, l'analyse des recherches sur la compréhension du nombre et des premières additions révèle que la structure des activités destinées à vérifier l'aspect logico-physique de la compréhension procédurale est fort semblable à celle utilisée pour la compréhension intuitive. En effet, alors que les enfants sont souvent incités à juger d'une situation ou d'une action exécutée par d'autres lors de la vérification de la compréhension intuitive, ils doivent la plupart du temps générer eux-mêmes des situations analogues à celles qui sont proposées pour la compréhension intuitive afin de faire preuve de compréhension procédurale. Ici, ils ne peuvent donc plus se fier à l'aspect visuel, mais ils doivent eux-mêmes utiliser une procédure pour résoudre le problème qui leur est posé. Lors du travail avec les petits nombres, cette stratégie est le plus souvent la correspondance terme à terme. On est par conséquent en présence d'un même type d'activité, qui exige par ailleurs des stratégies de résolution différentes.

Du point de vue de la compréhension de l'équivalence, les tâches décrites par les différentes recherches qui ont porté sur ce sujet révèlent donc qu'un enfant qui fait preuve d'une compréhension procédurale logico-physique du nombre et de l'addition doit travailler au niveau de l'équivalence quantitative de différents ensembles. En effet, il doit être en mesure de juger de l'équivalence de deux ou plusieurs collections ou de rendre équivalent un ensemble d'objets à un autre ensemble en ajoutant ou en retirant des éléments.

En conséquence, les critères de compréhension qui ont été dégagés ressemblent fortement à ceux élaborés par les auteurs du modèle de compréhension pour la compréhension procédurale logico-physique du nombre et des structures additives. Les critères suivants ont été retenus :

a) utilisation d'une correspondance terme à terme pour évaluer si une collection d'objets contient autant d'éléments qu'une collection de référence,
b) utilisation d'une correspondance terme à terme pour générer une collection d'objets qui contient autant d'éléments qu'un ensemble d'objets donné,
c) utilisation d'une correspondance terme à terme pour former un tout équivalent à un ensemble de référence par l'ajout d'éléments à un ensemble donné,
d) utilisation d'une correspondance terme à terme pour former un tout équivalent à un ensemble de référence par la réunion de deux ou plusieurs ensembles donnés,
e) utilisation d'une correspondance terme à terme pour déterminer si deux situations de réunion distinctes sont équivalentes.

4.2.2.2. La compréhension procédurale logico-mathématique

Dans les tâches destinées à vérifier la compréhension procédurale logico-mathématique, l'égalité numérique apparaît pour la première fois explicitement dans les activités. En effet, dans des tâches impliquant le nombre, les participants doivent se servir de procédures de dénombrement, afin de déterminer si le même nombre d'objets est présent dans différents ensembles. De même, lors du travail sur des structures additives, ils doivent explicitement additionner des ensembles et en déterminer la somme.

Dans le cadre de la description de la classification de Vergnaud (1997), nous avons vu que l'augmentation d'une quantité donnée est un premier contexte concret de l'addition. En fonction de l'élément inconnu dans un énoncé de ce type, on peut être porté à rechercher, en utilisant une procédure mathématique, l'état initial, l'état final ou encore la transformation qui a mené à l'état final. Chaque fois, l'enfant doit être en mesure d'affirmer que le nombre d'éléments à l'état final est le même que celui de l'état initial et de la transformation réunis. Herscovics et Bergeron (1989) ont dans ce cadre retenu uniquement des critères de compréhension, dans lesquels les élèves sont amenés à trouver l'état final. Or, comme nous nous apprêtons à analyser le processus de compréhension de l'équivalence et de l'égalité à travers différentes situations additives, nous avons également inclus des critères qui nécessitent la recherche de l'état initial ou de la transformation. En effet, des procédures mathématiques simples, comme le double comptage peuvent être utilisées pour trouver la solution à des problèmes de ce type. Le recours à la soustraction comme opération inverse de l'addition, qui serait plutôt l'indicateur d'une pensée réversible qui caractérise une compréhension abstraite, n'est pas encore nécessaire ici.

Trois critères de compréhension procédurale logico-mathématique de l'équivalence et de l'égalité peuvent en être dégagés.

a) La recherche de l'état final : l'ajout d'un certain nombre d'éléments à un ensemble initial suivi du dénombrement du tout,
b) la recherche de la transformation : utilisation d'une procédure de double comptage, afin de déterminer le nombre d'objets qu'il faut ajouter à un ensemble donné pour obtenir un autre nombre d'éléments, supérieur à l'état initial,
c) la recherche de l'état initial : utilisation d'une procédure de double comptage, afin de déterminer le nombre d'éléments présents initialement dans une collection avant que l'ajout d'un certain nombre d'éléments ait augmenté cette quantité.

Prenons l'exemple du deuxième critère pour illustrer l'appartenance de ces trois critères au palier logico-mathématique : il serait possible de vérifier cet aspect de compréhension en proposant à l'enfant un ensemble de sept jetons et de lui demander combien il faut ajouter de jetons, pour qu'il y en ait neuf en tout. Cette activité se situe bel et bien au niveau d'une égalité numérique parce que la réunion des 7 et 2 jetons correspond au même nombre que le total, soit 9. De plus, cette égalité est représentée par une égalité au niveau concret, puisque les sept jetons de l'état initial et les deux jetons qui sont rajoutés sont physiquement les mêmes que les neuf jetons de l'état final.

Un deuxième contexte décrit par Vergnaud (1997) est celui de la réunion, dans le cadre duquel deux sous-ensembles sont réunis pour former un tout. Selon la place qu'occupe l'inconnue à l'intérieur de l'énoncé, deux cas de figure sont envisageables : l'inconnue peut être placée sur le tout ou elle peut se retrouver sur un des deux sous-ensembles[9]. Tout comme pour l'augmentation d'une quantité donnée, Herscovics et Bergeron (1989) décrivent exclusivement des critères qui nécessitent la recherche du tout. Cependant, comme nous allons présenter aux enfants des équations du type a + __ = b, pouvant caractériser une réunion, avec l'inconnue portant sur un des deux sous-ensembles, et qui peuvent être résolues à l'aide d'un double comptage, nous avons inclus ces structures dans nos critères de compréhension. Deux nouveaux critères de compréhension procédurale logico-mathématique de l'équivalence et de l'égalité peuvent donc être dégagés :

a) Utilisation d'une procédure de dénombrement pour déterminer le nombre d'objets obtenus suite à une réunion de deux ensembles donnés,
b) utilisation d'une procédure de double comptage pour déterminer le nombre d'objets dans un de deux sous-ensembles formant un tout.

Le troisième et dernier contexte auquel se réfère Vergnaud (1997) est celui de la comparaison additive. Sans nécessairement avoir recours à une soustraction, dont l'utilisation serait, comme nous allons le voir ultérieurement, plutôt un indice d'une compréhension abstraite, l'enfant peut ici avoir recours à des stratégies comme le dénombrement et le double comptage. Selon la place de l'inconnue, on peut distinguer trois nouveaux critères de compréhension.

a) Utilisation d'une procédure de dénombrement pour déterminer combien il y a d'éléments dans une collection, équivalente à la réunion de deux ensembles connus,
b) utilisation d'une procédure de double comptage pour déterminer combien il faut ajouter d'éléments à une collection pour la rendre équivalente à une collection de référence,
c) utilisation d'une procédure de dénombrement pour déterminer combien d'éléments étaient présents dans une collection si l'ajout d'un nombre donné d'éléments rend cette collection équivalente à une collection de référence.

---

[9] Dans leur analyse conceptuelle des premières additions, Herscovics et Bergeron (1989) font référence uniquement à la réunion et à l'augmentation d'une quantité initiale donnée. Cependant, nous avons décidé d'inclure également des critères de compréhension par rapport au contexte de comparaison, dans lesquelles des procédures mathématiques peuvent intervenir dans le processus de résolution.

Une clarification s'impose en ce qui concerne l'appartenance de ces critères de compréhension au palier logico-mathématique et non au palier logico-physique. En effet, nous avons expliqué que le palier logico-physique fait intervenir l'équivalence, alors que le palier logico-mathématique implique des égalités quantitatives. Or, dans les critères de la compréhension procédurale logico-mathématique que nous venons d'énoncer, la situation concrète correspond à une équivalence, mais pas à une égalité. Cependant, comme l'enfant doit obtenir le même nombre d'éléments des deux côtés, son travail se situe au niveau de l'égalité numérique, même si la situation concrète correspond davantage à une équivalence.

Par exemple, le deuxième critère de compréhension pourrait mener à la tâche suivante : nous présentons à l'enfant une collection de cinq objets et une collection de huit objets. L'enfant doit alors déterminer quel est le nombre d'objets qu'il doit ajouter à la première collection pour qu'elle ait le même nombre d'objets que la deuxième collection. L'enfant doit dès lors comprendre que la réunion de 5 et 3 correspond au même nombre que 8. Il s'agit donc bel et bien d'une égalité quantitative, qui s'appuie sur une équivalence au niveau concret.

Comme nous l'avons vu, le contexte de comparaison peut également s'appliquer à des égalités de type "$a + b = c + d$", dans lesquelles l'inconnue porte sur un des 4 sous-ensembles. Deux stratégies sont envisageables pour traiter des équations de ce type. Tout d'abord, les enfants peuvent procéder par dénombrement et se référer au tout présent dans les deux réunions de sous-ensembles. Une deuxième stratégie serait de redistribuer les éléments d'une des paires de sous-ensembles, afin d'obtenir la même configuration que pour l'autre paire de sous-ensembles. Par exemple, pour compléter l'équation "$3 + 4 = \_\_ + 2$", représentée sous forme de comparaison, l'enfant pourrait transférer un élément de l'ensemble de 3 vers l'ensemble de 4, de manière à obtenir deux ensembles de 2 et 5 et à trouver en même temps l'inconnue. Nous pouvons en dégager deux autres critères de compréhension

a) utilisation d'une procédure de dénombrement pour déterminer combien il manque d'éléments dans un des sous-ensembles d'une représentation sous forme de comparaison d'une égalité de type "$a + b = c + d$",

b) utilisation d'une stratégie de redistribution pour déterminer combien il manque d'éléments dans un des sous-ensembles d'une représentation sous forme de comparaison d'une égalité de type "a + b = c + d".

4.2.3. La compréhension abstraite

Un troisième mode de compréhension est celui de l'abstraction, dans le cadre duquel l'apprenant se détache des procédures. En effet, comme le soulignent Herscovics, Bergeron et Bergeron (1987b, p. 2), un concept est souvent confondu avec la procédure qui a mené à sa construction au début de son apprentissage. Par exemple, selon ces auteurs, beaucoup d'enfants confondent le concept de nombre avec les procédures de dénombrement lors des premiers apprentissages numériques. Dans le même ordre d'idées, Duval (1996) soutient que de nombreux enfants confondent l'objet mathématique avec sa représentation sémiotique, c'est-à-dire le langage mathématique qui représente cet objet. Un exemple d'une telle erreur serait celle d'un élève qui confond le symbole 10 avec la quantité 10. Toutefois, ces deux types d'erreurs n'apparaissent plus chez les apprenants qui font preuve de compréhension abstraite.

En fonction de l'objet sur lequel elle porte, la compréhension abstraite peut être logico-mathématique ou logico-physique. Selon Herscovics et Bergeron (1989, p. 144), elle se distingue par quatre caractéristiques : la construction d'invariants, la réversibilité, la composition de transformations et la généralisation. Dans la présente section, nous allons déterminer quels critères de compréhension en résultent pour la compréhension abstraite logico-physique et logico-mathématique de l'abstraction.

4.2.3.1. La compréhension abstraite logico-physique

Les premiers critères de compréhension abstraite logico-physique de l'équivalence concernent la construction d'invariants, qui implique de la part de l'apprenant qu'il soit conscient que des transformations non pertinentes ne changent en rien la notion étudiée. En effet, la représentation du concept à l'étude est devenue « assez stable pour que la pensée de l'enfant puisse surmonter diverses transformations superficielles » (Herscovics et Bergeron, 1988a, p. 3).

Dans chacune des recherches que nous avons analysées dans le domaine des nombres et des opérations sur ceux-ci, plusieurs activités portant sur l'invariance servent à vérifier la compréhension abstraite logico-physique des participants. Ces activités demandent aux enfants de juger d'une transformation qui est apportée à un pré-concept de la notion étudiée. Toutes ces transformations sont non pertinentes, parce qu'elles ne changent pas la quantité ou l'opération représentée. Ainsi, pour l'aspect cardinal du nombre, une collection de jetons est allongée, contractée, dispersée, tournée ou cachée, entièrement ou partiellement, dans un sac en plastique. Par la suite, l'enfant doit juger si la collection est devenue plus grande, plus petite ou si la quantité représentée n'a pas changé. Les recherches qui portent sur la compréhension de l'addition comprennent, à côté des tâches sur l'invariance, des critères et des activités relatives aux propriétés du pré-concept. Ainsi, Herscovics et Bergeron (1989) proposent des critères relatifs à la commutativité et l'associativité du pré-concept. Cependant, aucune tâche correspondante n'est présentée dans cette recherche.

Comme les critères se situent ici au palier logico-physique, l'objet sur lequel portent les critères ne sont pas encore les notions étudiées elles-mêmes, mais des pré-concepts. Lors des premiers apprentissages numériques, ils ne font donc pas encore intervenir des nombres en tant que tels, mais le travail de l'élève porte sur des quantités d'objets concrets. On ne parle donc pas encore d'égalité numérique, mais uniquement d'équivalence quantitative.

Dans un contexte d'addition, Herscovics et Bergeron (1989, p.158) ont déterminé cinq critères concernant l'invariance de la quantité :

a) « Perception de l'invariance de la pluralité par rapport à la réunion physique des sous-ensembles,
b) perception de l'invariance de la différence de deux « sommes » par rapport à leur réunion physique,
c) perception de l'invariance du tout par rapport à un changement de configuration d'un des deux sous-ensembles,
d) perception de l'invariance du tout par rapport à un changement de configuration des deux sous-ensembles,

e) perception de l'invariance du tout par rapport à une transformation des parties (test piagétien). »

Comme on peut le constater, l'élève doit, dans chacune de ces situations, juger de l'équivalence quantitative de différentes situations additives, lorsque des changements non pertinents y sont apportés. Ces critères peuvent donc être repris intégralement pour notre analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité. En effet, ils concernent uniquement le pré-concept, qui est l'équivalence quantitative, et ne touchent pas encore le domaine numérique.

Le deuxième élément de l'abstraction, la réversibilité, peut s'appliquer à des actions physiques ou mentales. Herscovics et Bergeron (1989) soulignent qu'un individu peut, dans le cadre de l'abstraction logico-physique, reconnaître que l'action d'enlever est l'inverse de celle d'ajouter. De même, l'idée de décomposer un tout serait ici perçu comme l'inverse de réunir deux ensembles. Deux critères supplémentaires caractérisent donc la compréhension abstraite logico-physique :

a) La perception de l'action d'enlever comme l'inverse de celle d'ajouter,
b) la perception de l'action de décomposer comme l'inverse de celle de réunir.

Un troisième élément de l'abstraction logico-physique concerne des pré-concepts relatifs à l'apprentissage des propriétés des opérations. Ainsi, Bergeron et Herscovics (1989) soulignent que la pré-commutativité de l'addition ainsi que l'associativité de la réunion constituent deux aspects de la compréhension abstraite logico-physique de l'addition. Bien sûr, ces propriétés font en même temps intervenir la relation d'équivalence, puisque, malgré les changements apportés aux sous-ensembles, les quantités représentées sont encore les mêmes. Les critères de compréhension qui s'y rattachent sont les suivants :

a) Comprendre que la rotation de la représentation de deux sous-ensembles de 180 degrés ne modifie pas la quantité représentée,
b) comprendre que l'ordre dans lequel on ajoute deux collections à une collection donnée n'affecte pas la somme obtenue.

Le quatrième critère cité par Bergeron et Herscovics (1989) pour la compréhension abstraite logico-physique de l'addition est celui de la composition de transformations. Pour illustrer cette composition, on peut donner l'exemple de plusieurs transformations qui sont ramenées à une seule. Dans le contexte d'un travail sur la compréhension de la relation d'équivalence, la compréhension de la transitivité de cette relation peut également être un élément d'une compréhension abstraite logico-physique de l'équivalence. Ainsi, si une réunion de deux sous-ensembles équivaut à une deuxième réunion de deux sous-ensembles, et que cette deuxième réunion équivaut à une troisième réunion de deux sous-ensembles, alors la première réunion équivaut également à la troisième. Ce critère de compréhension, spécifique à la relation d'équivalence demande donc aux enfants de se détacher des procédures mathématiques et de réaliser un travail important sur les propriétés de la relation d'équivalence. Le critère qui peut en être dégagé est le suivant :

a) comprendre comment ramener plusieurs transformations à une seule,
b) comprendre la transitivité de l'équivalence à travers différentes situations de réunion.

Finalement, le cinquième et dernier critère de compréhension concerne la généralisation des connaissances. Dans un contexte de la compréhension de l'équivalence, cette généralisation pourrait se traduire de la manière suivante :

a) appliquer des connaissances acquises sur les propriétés des transformations à d'autres contextes que celui de l'utilisation des objets fournis lors de l'expérimentation.

4.2.3.2. La compréhension abstraite logico-mathématique

Au niveau de la compréhension abstraite logico-mathématique de l'addition, l'enfant ne se limite plus à travailler sur la notion de quantité comme pré-concept, mais réalise également un travail sur le nombre en tant que tel. On n'est donc plus uniquement en présence d'une équivalence quantitative entre des collections d'objets, mais également d'une égalité sur le plan numérique.

Comme pour la compréhension abstraite logico-physique, on retrouve sur le plan logico-mathématique les différents critères de la compréhension relatifs à l'invariance, qui se rapportent ici au nombre. Ainsi, des enfants qui ont une compréhension abstraite logico-mathématique de l'addition réalisent que

a) la réunion physique de sous-ensembles n'affecte pas le nombre d'objets représentés,
b) l'allongement d'un des sous-ensembles ou la transformation des parties ne modifient pas la pluralité.

Au niveau de la réversibilité, Herscovics et Bergeron (1989) soulignent qu'un enfant, qui a une compréhension abstraite logico-mathématique de l'addition, perçoit que la soustraction est l'opération inverse de l'addition. A ce critère, nous pouvons ajouter que la réversibilité peut jouer un rôle dans un deuxième cas de figure, qui est celui du recours à une soustraction lors de la résolution de certaines structures additives. Par exemple, afin d'être en mesure de résoudre un énoncé avec une structure de comparaison additive, dans lequel l'inconnue est placée sur la transformation, un élève peut se servir d'une soustraction, afin de trouver une solution à cette situation additive.

La réversibilité peut également avoir un sens plus large. En effet, ce critère exige de l'élève qu'il soit capable de revenir à l'état initial d'une transformation après avoir effectué celle-ci. Ainsi, après avoir effectué mentalement une soustraction (15 – 8 = 7), il doit être en mesure de définir quel a été l'état initial (15). L'élève doit donc annuler sa procédure pour retrouver l'ensemble de départ, qu'il n'a plus sous ces yeux. Cette forme de réversibilité est certes plus complexe que la première évoquée précédemment, mais un élève, qui fait preuve de compréhension abstraite, doit l'avoir acquise pour la manipulation d'ensembles d'objets concrets. Les critères de compréhension suivants peuvent être retenus concernant la réversibilité :

a) percevoir la soustraction comme opération inverse de l'addition,
b) se servir de la soustraction pour résoudre certaines structures additives,
c) être en mesure de revenir à l'état initial d'une transformation après avoir effectué celle-ci.

Pour ce qui est des compositions de transformations, Herscovics et Bergeron (1988b, p. 6) donnent l'exemple d'une suite d'additions, qui est ramenée à une seule opération. En effet, une telle transformation nécessite une pensée abstraite, car l'apprenant doit y transformer des opérations, indépendamment du matériel concret. Le critère de compréhension suivant est rattaché à la composition de transformations :

a) comprendre comment ramener une suite d'additions à une seule opération.

Finalement, la généralisation permet à l'apprenant d'appliquer des propriétés découvertes auprès de quelques exemples sur d'autres cas. L'apprenant doit donc encore une fois se détacher du matériel concret et des procédures et fait, par conséquent, preuve d'une compréhension abstraite. Ceci est vrai autant pour les propriétés des opérations que pour la transitivité de la relation d'égalité. Un dernier critère de compréhension peut en être déduit :

a) appliquer les connaissances acquises sur les propriétés de l'égalité et de l'addition à d'autres contextes que celui utilisé lors de l'expérimentation.

4.2.4. La compréhension formelle

La quatrième et dernière phase de compréhension du modèle de Bergeron et Herscovics (1988), la compréhension formelle, suppose entre autres le recours à la symbolisation mathématique.

La compréhension formelle logico-mathématique nécessite cependant une certaine compréhension procédurale et abstraite avant de pouvoir entrer en jeu. En effet, Herscovics et Bergeron (1989, p. 144) soulignent que l'apprentissage de la symbolisation doit suivre une compréhension intuitive, procédurale et abstraite du concept. Ainsi, pour ces auteurs, la compréhension formelle implique l'utilisation « d'une symbolisation de notions pour lesquelles une certaine compréhension procédurale ou un certain degré d'abstraction existent déjà ». Ce début de compréhension ne garantit cependant pas un passage facile à la symbolisation. Surtout dans le contexte de la compréhension de l'égalité et de l'équivalence, le symbolisme pose des difficultés spécifiques, comme le soulignent Herscovics et Bergeron (1989, p. 163), en prenant comme exemple des tâches de décomposition additive d'un nombre : « Ces notions sont accessibles à l'enfant tant qu'elles demeurent non symboliques. Et c'est parce qu'il interprète le signe d'égalité comme un appel à la réponse qu'il éprouve des difficultés à lui attacher d'autres significations. »

Un autre aspect de la compréhension formelle est celui de la preuve formelle et de la définition formelle. Ainsi, un apprenant qui fait preuve de compréhension formelle, considère le cardinal d'un nombre donné comme la propriété commune de tous les ensembles qui contiennent autant d'éléments.

Dans leur analyse conceptuelle de l'addition, Herscovics et Bergeron (1989) n'identifient pas clairement des critères de compréhension rattachés à la compréhension formelle. Cependant, ces auteurs mentionnent les difficultés provoquées par différents types d'équations, auxquelles nous avons fait référence dans le cadre de notre problématique.

Les critères de compréhension que nous avons élaborés pour la compréhension formelle de l'égalité peuvent se regrouper dans trois catégories : la reconnaissance de l'égalité dans différentes situations, l'écriture d'une équation correspondant à un énoncé donné et la résolution de différentes équations.

Tout d'abord, un enfant qui a une compréhension formelle des relations d'équivalence et d'égalité doit être en mesure d'accepter une égalité sous sa forme correcte. Ce critère est important, comme nous avons montré dans le cadre de notre problématique, du fait que des enfants qui considèrent le signe d'égalité comme un opérateur ont tendance à accepter seulement des égalités qui répondent au schéma "a + b = c". Cependant, il ne suffit pas de reconnaître ces égalités en tant que telles, mais l'enfant doit également être en mesure de justifier son jugement en s'appuyant sur l'équivalence des écritures des deux côtés du signe « = ». Les critères de compréhension reliés à cette catégorie sont les suivants :

a) Reconnaître une égalité du type "a = a", en basant sa justification sur l'égalité au plan numérique,

b) reconnaître une égalité du type "a = b + c", en basant sa justification sur l'égalité au plan numérique,
c) reconnaître une égalité du type "a + b = c + d", en basant sa justification sur l'égalité au plan numérique.

Ensuite, la compréhension formelle de l'égalité implique aussi qu'un enfant est en mesure de transformer des énoncés, traduisant un contexte réaliste en langage symbolique mathématique. Dans les activités correspondantes, l'enfant est amené à représenter les situations qui lui sont soumises à l'aide de symboles mathématiques, sous forme d'une équation ou d'une égalité. Cependant, ces tâches sont plus difficiles que les précédentes, puisque Bergeron et Herscovics (1988, p. 162) expliquent qu'il « est plus facile de reconnaître la représentation symbolique que de la générer ». Les critères de compréhension qui en découlent sont les suivants :

a) Générer une équation ou une égalité correspondant à un énoncé de type transformation additive,
b) générer une équation ou une égalité correspondant à un énoncé de type réunion,
c) générer une équation ou une égalité correspondant à un énoncé de type comparaison additive,
d) générer une équation ou une égalité correspondant à un énoncé de type décomposition,
e) générer une équation ou une égalité correspondant à un énoncé de type redistribution des éléments d'un ensemble à l'autre.

Bien sûr, pour chacune des ces tâches, la place de l'inconnue peut varier, ce qui peut en influencer le degré de difficulté.

Finalement, une dernière catégorie de critères de compréhension formelle concerne la résolution de différentes équations par les enfants. Ici encore, les enfants doivent justifier leur démarche de résolution en s'appuyant sur l'égalité numérique. Les critères retenus sont les suivants :

a) Résoudre des équations correspondant aux structures suivantes, en s'appuyant sur l'égalité au plan numérique :

- "a + b = __"
- "a + __ = c"
- "__ + b = c"
- "a = __"
- "__ = b + c"
- "a = b + __"
- " a = __ + c"
- "a + b = __ + d"
- "a + b = c + __"
- "a + __ = c + d"
- "__ + b = c + d".

CHAPITRE 3
MÉTHODOLOGIE

Dans la présente section, qui vise à faire le point sur la méthodologie de notre recherche doctorale, nous allons, dans une première étape, choisir une méthodologie adaptée à notre recherche. Par la suite, nous allons décrire notre devis expérimental et les modalités de l'analyse des données. Finalement, nous allons expliciter les modalités de l'échantillonnage, discuter les considérations déontologiques qu'implique ce projet de recherche et présenter le protocole de recherche.

1. UNE MÉTHODOLOGIE QUALITATIVE

Notre objectif de recherche est de comprendre l'évolution de la compréhension et la progression dans l'apprentissage des relations d'équivalence et d'égalité lors des premiers apprentissages numériques. Pour atteindre cet objectif, une méthodologie quantitative nous aurait surtout permis de déterminer et d'analyser quelles connaissances les enfants possèdent à différents moments de leur apprentissage. Or, ce ne sont pas tant l'état des connaissances des participants qui nous intéressent, que les processus cognitifs qui entrent en jeu lors de l'apprentissage. Une méthodologie qualitative nous paraît donc plus adéquate, puisqu'elle nous permettra de décrire ces processus cognitifs. De plus, comme le souligne Paillé (1997), une recherche qualitative s'inscrit dans une optique compréhensive. Eu égard aux objectifs de notre recherche, une telle méthodologie nous semble donc particulièrement adaptée. Un autre argument qui plaide en faveur de l'utilisation d'une méthode qualitative est que celle-ci permet d'analyser en détail les actions d'un nombre réduit de personnes, alors qu'une méthode quantitative aurait impliqué un nombre de participants plus élevé, mais des analyses moins détaillées pour chacun d'entre eux.

En didactique des mathématiques, plusieurs types de méthodes ont été utilisées au fil des années pour atteindre des buts similaires à ceux que nous poursuivons. Dans cette section, nous allons en décrire trois, à savoir l'analyse d'erreurs, l'entrevue clinique et l'expérimentation didactique. Nous allons également détailler les arguments qui nous ont amené à articuler notre méthodologie autour d'une expérimentation didactique.

1.1. L'analyse d'erreurs

L'analyse d'erreurs part du constat que la plupart des erreurs des élèves reposent sur une procédure ou un raisonnement sous-jacent erroné qui est utilisé systématiquement lors de la résolution de tâches semblables. Ainsi, Ashlock (1998) a su montrer que, effectivement, les erreurs des élèves ne sont souvent pas le fruit du hasard, mais qu'elles résultent de raisonnements erronés qu'il est possible d'identifier. D'ailleurs, cet auteur a dressé une typologie d'erreurs que des élèves peuvent faire en manipulant différents concepts mathématiques.

Pour le chercheur ou l'enseignant, il s'agit dès lors de déterminer, à partir de plusieurs activités semblables, le raisonnement erroné que l'élève a utilisé. Cette façon de procéder présente l'avantage qu'elle est facilement réalisable en classe. Elle est d'ailleurs particulièrement efficace, lorsqu'elle est appliquée à des notions mathématiques assez spécifiques, comme les algorithmes de calcul correspondant aux quatre opérations arithmétiques de base.

Cependant, elle n'est pas adaptée pour notre recherche doctorale, car elle ne permet pas de répondre à notre question de recherche, à savoir de cerner le processus de compréhension des relations d'équivalence et d'égalité, et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les traces écrites que laissent les élèves en résolvant différentes tâches ne donnent pas un portrait exhaustif de la compréhension des élèves : on ne peut que formuler des hypothèses quant aux stratégies erronées utilisées par les élèves, sans pouvoir les vérifier. De même, l'analyse d'erreurs ne permet pas d'avoir accès aux processus cognitifs qui ont mené un élève à utiliser un certain raisonnement. Il nous sera également difficile d'appliquer l'analyse d'erreurs aux relations d'équivalence et d'égalité dans le cadre des premiers apprentissages numériques, car, comme nous l'avons vu dans notre revue de littérature sur la problématique de recherche, les erreurs des élèves à propos de ce concept sont souvent les mêmes. L'absence d'erreur dans les réponses écrites d'un élève ne garantit pas que ce dernier ait entièrement compris la notion abordée. On n'a qu'à penser à des raisonnements erronés, qui, par hasard, peuvent mener à des réponses correctes. Or, l'analyse d'erreurs ne permet pas de tenir compte de ce phénomène, parce qu'elle ne donne pas accès à la totalité du processus cognitif de l'élève.

1.2. L'entrevue clinique

C'est Piaget qui a utilisé l'entrevue clinique, dont les origines remontent à la psychiatrie, pour la première fois pour cerner les processus cognitifs des enfants en mathématiques. En effet, ce chercheur s'est rendu compte que, souvent, les enfants avaient recours à des raisonnements inattendus. Afin d'avoir accès à leurs processus cognitifs, Piaget a donc demandé aux participants d'expliciter les démarches qui les ont amenés à trouver la solution à un problème.

Au début, l'entrevue clinique utilisée par Piaget se résumait à un simple dialogue avec les enfants pendant lequel le chercheur essayait d'explorer les processus cognitifs des enfants. Afin de répondre aux exigences d'une entrevue clinique, ce dialogue devait néanmoins se situer dans le cadre d'une recherche avec un objet précis et des hypothèses bien établies.

L'entrevue clinique a cependant évolué depuis ses débuts en devenant plus standardisée, de façon à ce qu'on parle maintenant d'une entrevue semi-standardisée. Ainsi, les questions posées aux élèves sont fixes et les conditions expérimentales sont les mêmes pour tous les participants ; le chercheur dispose néanmoins d'une certaine liberté pour explorer des pistes qui lui paraissent prometteuses.

Sous sa forme actuelle, l'entrevue clinique comporte, selon Van der Maren (1995), cinq étapes. La proposition d'une tâche à l'enfant (1) est suivie d'une observation de l'action du sujet (2). Le chercheur procède à l'induction d'une hypothèse (3), qu'il vérifie par la suite à l'aide d'une nouvelle tâche similaire (4). L'hypothèse étant infirmée, une autre activité est élaborée (5) et le processus recommence au début.

Comme l'entrevue clinique permet d'accéder aux processus de compréhension des élèves, cette méthode nous semble déjà plus pertinente pour notre recherche que la simple analyse d'erreurs, puisqu'elle permet de dresser un portrait beaucoup plus exhaustif de la compréhension. D'ailleurs, nous nous en sommes servi lors du prétest et du post-test, afin d'évaluer la compréhension des élèves au début et à la fin de la recherche. Ici, l'entrevue clinique nous a donc permis d'avoir accès à beaucoup plus d'informations qu'un test écrit.

En ce qui concerne le déroulement de ces prétest et post-test, nous avons préparé plusieurs activités qui ont été présentées aux élèves. Ces derniers devaient les résoudre et décrire le cheminement qui leur a permis d'aboutir à leur réponse. Suite à une analyse des résultats et des processus cognitifs mis en jeu par les enfants, nous pouvions procéder à la sélection des participants après le prétest et évaluer les progrès réalisés par les enfants à la suite du post-test. Une description plus détaillée des prétest et post-test sera réalisée dans la section concernant les résultats de recherche.

L'entrevue clinique n'a cependant pas été retenue pour investiguer comment s'opère le processus de compréhension des relations d'équivalence et d'égalité, puisqu'elle ne tient pas compte de l'effet de l'enseignement sur la compréhension de l'élève. En effet, aucune instruction visant à faire progresser la compréhension de l'élève n'est dispensée dans le cadre d'une entrevue clinique, et les effets de l'enseignement ne sont pas étudiés. D'ailleurs, d'un point de vue historique, ces lacunes de l'entrevue clinique, méthodologie pourtant largement utilisée dans les recherches en didactique des mathématiques jusque dans les années 1970, ont favorisé l'utilisation de l'expérimentation didactique comme nouvelle méthode de recherche (Steffe et Thompson, 2000).

1.3. L'expérimentation didactique

Dans cette section, nous allons, dans un premier temps, décrire les modalités générales d'une expérimentation didactique et, dans un deuxième temps, expliciter les raisons qui nous ont amené à choisir cette méthodologie.

1.3.1. Bref historique

L'expérimentation didactique est une méthode dont certains éléments remontent à Vygotsky, un pédagogue soviétique, qui y eut recours dès la première moitié du XX^{e} siècle. Par la suite, cette méthode fut, entre autres pour des raisons idéologiques, très répandue chez les chercheurs en éducation de l'Union soviétique. En effet, la doctrine communiste étant de nature égalitaire, les recherches en éducation des pays communistes se sont à cette époque concentrées essentiellement sur les effets de l'enseignement sur l'apprentissage, et non pas sur d'éventuelles différences interindividuelles ou socioculturelles.

L'expérimentation didactique comporte la mise en place, la réalisation et l'analyse d'une séquence d'enseignement sur un sujet déterminé auprès d'un certain nombre de participants à la recherche.

Comme le souligne Herscovics (1983, p. 12), les objectifs de recherche qui justifient l'utilisation d'une expérimentation didactique sont ceux qui s'intéressent aux transformations des connaissances lors d'une séquence d'enseignement : « L'expérimentation didactique vise à cerner la pensée de l'élève, alors que ses structures cognitives se transforment lors d'une intervention pédagogique. » Pour Steffe et Thompson (2000, p. 267), l'expérimentation didactique permet au chercheur d'accéder directement au processus d'apprentissage des participants.

> « A primary purpose for using teaching experiment methodology is for researchers to experience firsthand students' mathematical learning and reasoning. Without the experiences afforded by teaching, there would be no basis for coming to understand the powerful mathematical concepts and operations students construct. »

Par ailleurs, English et al. (2002, p. 803) soulignent que l'avantage de l'expérimentation didactique par rapport à d'autres méthodologies est qu'elle permet de cerner l'évolution de la compréhension de manière détaillée : « Teaching experiment methodologies […] offer considerable promise in providing micro and dynamic evidence of students' learning, in contrast to research that offers only a series of discrete snapshots of students' mathematical thinking. »

Dans ce contexte, Steffe (1991, p. 177) confirme que l'expérimentation didactique vise l'analyse de l'évolution des processus cognitifs de l'enfant dans une séquence d'enseignement, ce qui implique également un nouveau rôle pour le chercheur :

> « The constructivist teaching experiment is a technique that was designed to investigate children's mathematical knowledge and how it might be learned in the context of mathematics teaching. In a teaching experiment, the role of the researcher changes from an observer who intends to establish objective scientific facts to an actor who intends to construct models that are relative to his or her own actions. »

Héraud (1991) mentionne que l'expérimentation didactique se distingue par les caractéristiques suivantes : elle est une méthode de recherche dynamique parce qu'elle vise à cerner un mouvement, ici la construction d'un concept ou d'une relation; elle est une méthode essentiellement qualitative qui génère un grand nombre de données microscopiques sur un petit nombre de sujets au lieu de données macroscopiques sur un grand nombre de sujets ; elle est utilisée dans le cadre d'une étude longitudinale, dont la durée peut varier de quelques semaines à plusieurs années ; elle s'intéresse surtout aux processus cognitifs mis en jeu par les élèves dans le cadre de leur processus d'apprentissage. Comme nous nous apprêtons à analyser un processus de compréhension lié à un cadre d'enseignement, le choix d'une expérimentation didactique s'est donc imposé.

Si les caractéristiques mentionnées sont communes à toutes les expérimentations didactiques, Steffe et Thompson (2000) soulignent que cette méthode n'est cependant pas standardisée, mais existe sous différentes formes : « [The teaching experiment] certainly did not emerge as a standardized methodology nor has it been standarized since. Rather, the teaching experiment is a conceptual tool that researchers use in the organization of their activities » (p. 274).

Par ailleurs, l'expérimentation didactique ne vise pas uniquement à observer les connaissances et les procédures des participants, mais a aussi pour objectif de les faire progresser selon un plan d'intervention établi à partir d'un modèle d'analyse de construction du concept. Comme nous l'avons vu, c'est le modèle de compréhension de Bergeron et Herscovics (1988) qui a servi, dans notre recherche, à réaliser une analyse préliminaire de la construction des relations d'équivalence et d'égalité.

1.3.2. Choix de l'expérimentation didactique

Le recours à une expérimentation didactique nous semble particulièrement pertinent eu égard aux objectifs de la recherche. Ce choix méthodologique nous permet d'avoir accès aux processus cognitifs des enfants, tout en tenant compte des effets de l'enseignement sur la compréhension. Car, simultanément à notre séquence d'enseignement, nous pouvons engager des discussions avec les sujets sur la démarche utilisée pour résoudre les différentes activités.

Ici, on peut noter une différence substantielle avec l'entrevue clinique. Alors que cette dernière permet d'avoir accès aux processus cognitifs en confrontant les participants à des tâches, l'expérimentation didactique vise en plus à suivre les participants dans la compréhension de la notion visée. Ainsi, la compréhension des enfants progresse à travers différentes séances d'enseignement qui sont adaptées au fur et à mesure aux besoins spécifiques des participants et de la recherche. Nous serons donc en mesure d'analyser l'évolution des conceptions des enfants pendant que celles-ci se transforment.

Comme nous souhaitons cerner l'évolution de la compréhension, il nous faut également recourir à une méthodologie qui permet une recherche pouvant s'étendre sur plusieurs semaines. L'expérimentation didactique répond bien à ce critère, puisque sa durée peut varier de quelques semaines à plusieurs mois.

La flexibilité de l'expérimentation didactique constitue également un atout majeur. Tout en nécessitant la mise en place d'une séquence d'enseignement détaillée, des ajustements sont possibles afin de vérifier des hypothèses ou de poursuivre de nouvelles pistes de recherche. Une première analyse des données de recherche se faisant au cours de la collecte de données, le plan d'intervention subira donc des modifications en cours de route.

L'expérimentation didactique permet aussi de tenir compte des trois composantes de la relation didactique, à savoir de l'enseignant, de l'élève et du savoir, ainsi que des interactions entre ces éléments. En effet, le volet du savoir est directement touché par l'analyse conceptuelle que nous avons effectuée des relations d'équivalence et d'égalité à l'aide du modèle de Bergeron et Herscovics (1988). De même, comme l'expérimentation didactique comporte l'élaboration et l'expérimentation d'une séquence d'enseignement, l'enseignant et ses interventions sont également pris en compte. Finalement, l'analyse des processus de compréhension mis en place par les sujets participant à notre recherche touche le rapport de l'élève au savoir.

Selon Brousseau (1998, p. 50), la prise en compte des trois composantes de la relation didactique est un avantage indéniable dans une recherche en didactique des mathématiques :

> « Une des hypothèses fondamentales de la didactique consiste à affirmer que seule l'étude globale des situations qui président aux manifestations d'un savoir, permet de choisir et d'articuler les connaissances d'origines différentes, nécessaires pour comprendre les activités cognitives du sujet, ainsi que la connaissance qu'il utilise et la façon dont il la modifie. »

La prise en compte de l'enseignement dans l'expérimentation didactique constitue également une des raisons pour laquelle nous avons choisi cette méthodologie aux dépens d'un recours exclusif à l'entrevue clinique pour la partie principale de notre recherche. Alors que cette dernière aurait également aidé à dresser un portrait de la compréhension des participants, l'expérimentation didactique permet en plus de suivre l'évolution de la compréhension au moment même où les connaissances se construisent et d'analyser l'effet de l'enseignement sur la compréhension des participants.

Finalement, cette approche méthodologique s'inscrit tout à fait dans la thématique du doctorat en éducation à l'Université de Sherbrooke, à savoir l'interrelation entre la recherche, la formation et la pratique. Notre thèse doctorale comporte une partie importante d'analyse conceptuelle et de théorisation sur les processus de compréhension des relations d'équivalence et d'égalité. En même temps, le volet de la pratique est touché par le fait que nous avons élaboré une séquence destinée à enseigner les relations d'équivalence et d'égalité. La formation des enseignants est indirectement abordée par notre étude, puisque les résultats pourront avoir des retombées sur la façon de présenter cette matière aux enfants, et par le fait même être intégrés dans la formation en didactique des mathématiques.

2. DEVIS EXPÉRIMENTAL

En ce qui concerne le déroulement de l'expérimentation didactique en tant que telle, nous avons suivi les sept étapes suivantes : l'élaboration de la séquence d'enseignement, la construction d'hypothèses, une recherche préliminaire dans les salles de classe, une évaluation des participants, la passation de la séquence d'enseignement, l'apport éventuel de modifications à la séquence et l'expérimentation de ces modifications. Nous avons également décidé d'inclure un post-test dans notre recherche à la fin de l'expérimentation, afin de déterminer si le niveau de compréhension atteint par les participants est demeuré stable dans le temps.

2.1. Élaboration de la séquence d'enseignement

La première étape dans le travail avec l'expérimentation didactique a consisté en l'élaboration d'une première version du prétest et du post-test ainsi que de la séquence d'enseignement. Comme nous venons de le décrire antérieurement, celle-ci est basée sur l'analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité.

Ainsi, elle contient une progression de différentes activités dont l'ensemble tient compte de tous les aspects de la compréhension des relations d'équivalence et d'égalité tels que décrits à la suite de l'analyse conceptuelle de ces relations. Nous allons revenir sur la description détaillée de la séquence d'enseignement dans le quatrième chapitre de ce document.

2.2. Recherche préliminaire dans les salles de classe

La version provisoire de la séquence d'enseignement a par la suite été mise à l'épreuve au cours d'une préexpérimentation. Deux raisons ont justifié le recours à une préexpérimentation : la vérification de différents aspects avant le début de la recherche, et l'entraînement à l'utilisation d'une expérimentation didactique. En ce qui concerne le premier de ces aspects, Héraud (1991) souligne qu'une recherche préliminaire dans les salles de classes peut servir à vérifier différents aspects de la recherche. Ainsi, nous avons investigué, à l'aide d'une expérimentation avec trois élèves d'une première année du primaire au Québec, si les objectifs que nous nous étions fixés étaient réalisables. Au cours de cette pré-expérimentation, nous avons réalisé différentes tâches d'évaluation et d'enseignement avec ces élèves, sans cependant mettre à l'épreuve l'intégralité de la séquence d'enseignement. Cette préexpérimentation a également servi à la dernière mise au point du matériel utilisé dans les prétest et post-test. En même temps, nous avons eu l'occasion de mettre au point l'agencement des consignes données aux enfants. Deuxièmement, la préexpérimentation nous a permis de nous entraîner à l'utilisation de l'expérimentation didactique. C'est d'ailleurs pour cette raison que Steffe et Thompson (2000) recommandent fortement le recours à une préexpérimentation avant le début d'une expérimentation didactique.

La séquence d'enseignement a donc été établie de façon précise avant le début de l'expérimentation en tant que telle. Cependant, comme nous allons le décrire dans notre analyse de résultats, plusieurs modifications ont été apportées à cette séquence afin de l'adapter à nos besoins au cours de l'expérimentation au Luxembourg.

2.3. Construction d'hypothèses

Après la mise sur pied de notre séquence d'enseignement, la construction d'hypothèses se rapporte surtout aux résultats escomptés. Ainsi, des hypothèses quant aux processus cognitifs impliqués lors de la construction des relations d'égalité et d'équivalence ont été émises. Ces hypothèses se sont appuyées sur l'analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité. Comme le soulignent Steffe et Thompson (2000), ces hypothèses ne sont pas nécessairement prédéterminées avant l'expérimentation didactique. En effet, elles peuvent apparaître, soit dans l'action d'enseigner, soit lors de l'analyse des données entre les différentes séances d'enseignement.

Dans le cadre de notre expérimentation, les hypothèses de départ et celles relatives aux processus cognitifs des enfants ont constamment été vérifiées. Ainsi, c'est surtout l'analyse immédiate des données obtenues après chaque séance d'enseignement qui nous a permis de procéder à une vérification d'hypothèses émises. Cette vérification pouvait, par exemple, se réaliser lors de la contre-interrogation d'un des participants au sujet d'une hypothèse formulée lors de l'analyse de la dernière séance d'enseignement.

2.4. Prétest pour évaluer et sélectionner les participants

L'évaluation des élèves à l'aide du prétest a, par la suite, servi de première partie de la collecte de données dans la classe d'expérimentation au Luxembourg. L'analyse des résultats du prétest a mené à la sélection définitive des six élèves qui ont fait partie du groupe expérimental et qui ont participé aux différentes séances de notre séquence d'enseignement.

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'inclusion d'un prétest dans le dispositif expérimental n'est pas obligatoire. Cependant, plusieurs recherches[10] (entre autres Bednarz et Garnier, 1996 ; Saenz-Ludlow, 1995 ; Thompson, 1993 ; Linchevski et Herscovics, 1996 et Verschaffel et De Corte, 1997) s'en sont servies dans le cadre d'une expérimentation didactique, ce qui peut avoir, à notre avis, plusieurs avantages. Tout d'abord, le prétest nous a servi d'instrument d'évaluation lors de la sélection des participants. En même temps, il nous a permis de dresser un portrait assez complet de la compréhension de l'élève avant le début de l'expérimentation. À la fin de celle-ci, un post-test a permis de faire un deuxième bilan de la compréhension. Comme nous allons le décrire dans la section de l'analyse des résultats, différentes conclusions en ont pu être tirées quant à la progression des enfants dans la séquence d'apprentissage et aux obstacles cognitifs qui restent en place à la fin de l'expérimentation.

[10] Afin de mieux cerner comment l'expérimentation didactique a été utilisée récemment en didactique des mathématiques et de corroborer notre dispositif expérimental, nous avons analysé les méthodes utilisées par différents auteurs qui se sont servis d'une expérimentation didactique en relation avec des notions mathématiques du primaire et du début du secondaire. Les articles analysés ont été publiés entre 1990 et 2000 et ont été sélectionnés suite à une recherche du mot-clé « teaching experiment » dans la banque de données ERIC. Par la suite, nous avons systématiquement répertorié et analysé les dispositifs expérimentaux utilisés par les différents chercheurs.

2.5. Expérimentation de la séquence d'enseignement

En ce qui concerne notre séquence d'enseignement, nous allons d'abord décrire les modalités du déroulement de notre expérimentation didactique. Ensuite, nous expliquerons pourquoi nous avons eu recours à l'enregistrement vidéo de toutes les séances, tout en détaillant quelques enjeux d'ordre linguistique. Finalement, la mise en place d'un plan d'intervention détaillé sera justifiée.

2.5.1. Les modalités du déroulement de l'expérimentation didactique

La séquence d'enseignement elle-même s'est étendue sur une durée de sept semaines. En tout, nous avons réalisé un prétest avec tous les élèves de la classe, six à neuf séances d'enseignement avec les six enfants sélectionnés ainsi qu'un post-test avec les enfants qui ont participé à la partie expérimentale de la recherche.

Plusieurs raisons nous ont guidé dans ce choix. Tout d'abord, en ce qui concerne la décision de dispenser un enseignement individuel à chacun des participants, nous étions d'avis que cette mesure nous permettrait de mieux recueillir les processus cognitifs utilisés par chacun des enfants. Lors d'un enseignement à un groupe de trois ou six élèves, cette différenciation aurait été plus difficile. Ce choix est confirmé par Steffe (1991), pour qui un enseignement individuel est tout à fait indiqué si on a l'intention d'observer les modifications qui s'opèrent dans les schèmes conceptuels des enfants. Linchevski et Herscovics (1996, p. 39), qui ont également choisi d'utiliser individuellement une expérimentation didactique auprès de six élèves, soulignent que ce dispositif s'inscrit dans la lignée des « études de cas multiples. »

En ce qui concerne la durée des différentes séances, l'âge de nos participants a déterminé notre choix de ne pas dépasser 30 minutes. En effet, comme nous allons travailler avec des enfants de première année, il serait illusoire de penser que ceux-ci peuvent se concentrer sur une tâche pendant une très longue durée. De même, afin d'assurer une certaine continuité dans le processus d'apprentissage, nous avons réalisé deux séances d'enseignement par semaine avec chacun des enfants. Ce mode de fonctionnement présentait l'avantage qu'il nous permettait de procéder à une première analyse de chaque rencontre avant de passer à la séance suivante.

Comme nous nous inscrivons dans un cadre de référence constructiviste, les séances d'enseignement ne viseront pas une transmission de connaissances mathématiques à l'enfant. Bien au contraire, les activités seront construites de façon à favoriser la construction de nouvelles représentations plus adaptées chez les participants. Notre rôle comme chercheur nous amenait à susciter l'émergence de ces nouvelles représentations et à rendre évidents les processus cognitifs qui ont guidé les enfants dans le travail sur une activité. D'ailleurs, comme le soulignent Steffe et Thompson (2000, p. 291), l'objectif d'une expérimentation didactique n'est pas nécessairement l'apprentissage des participants, mais plutôt l'observation des modifications de leurs schèmes mathématiques face aux situations qui leur sont présentées.

> « In a teaching experiment, it is never the intention of the teacher-researcher that the students learn to solve a single problem, even though situations are presented to them that might be a problem for them. Rather, the interest is in understanding the students' assimilating schemes and how these schemes might change as a result of their mathematical activity. »

2.5.2. Le double rôle d'intervenant et de chercheur

En ce qui concerne le choix de la personne qui interviendra auprès des participants, deux options étaient envisageables : intervenir nous-même ou former l'enseignante de la classe pour lui permettre de réaliser la séquence d'enseignement avec les enfants. Dans cette section, nous allons d'abord expliquer en quoi consiste le rôle de l'intervenant, pour ensuite justifier pourquoi nous avons décidé d'intervenir nous-même auprès des élèves.

Pour Schön (1994), un enseignant est un praticien réflexif, qui fait preuve, entre autres, de réflexion au cours de l'action et de réflexion sur l'action. Pendant l'acte d'enseignement, l'intervenant réajuste constamment ses actions en fonction des besoins de l'élève et des objectifs qu'il poursuit. De même, il porte une réflexion sur son action qui constitue, pour Schön (1994, p. 165), une « réflexion de nature rétroactive ». Après son intervention, l'enseignant évalue le déroulement de l'enseignement en tenant compte notamment des résultats obtenus, des difficultés rencontrées et des réajustements apportés afin d'en tenir compte pour des interventions futures.

Dans la présente recherche, le double rôle d'intervenant et de chercheur comporte plusieurs avantages. Tout d'abord, comme nous avons nous-même réalisé l'analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité et construit la séquence d'enseignement, nous avons de bonnes connaissances sur les concepts impliqués et les objectifs que nous poursuivons. Il nous était par conséquent plus facile de nous réajuster en cours d'intervention aux besoins des participants en tenant compte des objectifs de recherche.

De même, la réflexion sur nos interventions a été facilitée par le fait que nous avons nous-même travaillé avec les enfants. En effet, de cette façon, nous connaissons exactement les raisons qui nous ont amené à faire certains choix au cours de l'intervention. De même, nous avions la possibilité d'avoir recours à des premières hypothèses concernant l'analyse des données que nous avons pu construire pendant l'enseignement. Si nous avions formé l'enseignante pour intervenir au cours de l'expérimentation, nous n'aurions pas pu avoir accès directement à ces phénomènes.

L'expérimentation de la séquence d'enseignement par l'enseignante aurait pu introduire un autre biais dans notre démarche de recherche. Ainsi, nous aurions dû tenir compte de la façon dont l'enseignante applique les directives communiquées avant l'intervention. Cette difficulté pouvait être évitée en conduisant nous-même les interventions auprès des participants.

Bien sûr, notre double rôle d'intervenant et de chercheur n'est pas exempt de biais ; nous avons cependant tenté de les réduire au minimum. Tout d'abord, la séquence d'enseignement en tant que telle était préparée d'avance et ne changeait que légèrement au cours de l'expérimentation pour tenir compte des difficultés de certains enfants. Ensuite, nous avons déterminé des critères, qui tenaient notamment compte de la diversité des participants, pour sélectionner les participants à notre expérimentation. Finalement, notre objectif n'était pas nécessairement de démontrer qu'on peut faire comprendre le signe = à tous les enfants, mais plutôt de comprendre comment évolue leur compréhension de ce signe. Nous n'étions donc pas dans l'obligation d'obtenir des résultats chez le plus grand nombre de participants.

2.5.3. L'enregistrement de toutes les séances d'expérimentation

Toutes les séances d'enseignement ont été enregistrées sur des cassettes vidéo et, par la suite, transcrites intégralement. Ces deux mesures nous ont permis d'analyser plus en détail les actions posées par les enfants et celles de l'intervenant au cours de l'expérimentation didactique.

Afin d'habituer les enfants à la présence des caméras, nous avons organisé, avec tous les enfants de la classe une première rencontre. Au cours de cette rencontre, plus informelle, nous avons réalisé avec les enfants différentes activités non scolaires, tout en établissant un premier contact.

Comme les sujets de notre recherche étaient des élèves de première année d'études originaires du Luxembourg, plusieurs considérations d'ordre linguistique doivent être prises en compte lors de l'analyse des données et de la rédaction de la thèse. En effet, au Luxembourg, la langue maternelle de la majorité des enfants est le luxembourgeois qui est une langue d'origine germanique. Dès le début de leur scolarisation, les enfants apprennent à lire et à écrire en allemand, l'apprentissage du français ne débutant qu'au deuxième semestre de la deuxième année d'études. Au moment de notre expérimentation, en avril et mai 2001, les participants à notre recherche n'avaient donc pas encore commencé leur apprentissage du français.

En ce qui concerne la langue utilisée lors de l'enseignement des mathématiques, les manuels scolaires sont rédigés en allemand jusqu'en sixième année du primaire, à l'exception toutefois des manuels consacrés à l'enseignement de la langue française. Cependant, une grande majorité des explications des concepts mathématiques en classe se donne traditionnellement en luxembourgeois. Par conséquent, afin d'éviter des biais causés par des problèmes linguistiques, nous avons décidé de conduire les séquences d'enseignement en luxembourgeois.

Cette décision a cependant des répercussions sur l'analyse des données et la rédaction des résultats de notre recherche. Comme le luxembourgeois n'est pas accessible à des lecteurs non avertis, nous avons décidé de réaliser tous les transcrits en français. La traduction s'est faite directement lors de la réalisation des transcrits. Lorsque des ambiguïtés pouvaient apparaître au niveau de la traduction, nous avons, à côté de la traduction française qui se rapprochait le plus des concepts énoncés, décidé de consigner les paroles en luxembourgeois, entre parenthèses, dans le transcrit. Cette mesure nous a permis d'éviter des biais causés par l'analyse d'un corpus de données traduit d'une autre langue.

2.5.4. La mise en place d'un plan d'intervention détaillé

Afin d'assurer la rigueur nécessaire pour un projet de recherche comme le nôtre, il ne suffisait pas de déterminer les différentes activités d'enseignement au fur et à mesure que l'expérimentation progressait. Au contraire, il était nécessaire d'élaborer le plan d'intervention en détail avant le début de la séquence d'apprentissage. Ce plan comprenait les objectifs poursuivis par chacune des séquences d'enseignement, ainsi qu'une préparation détaillée de chacune des rencontres avec les élèves du groupe expérimental.

Cette précaution ne signifie cependant pas que des modifications ne pouvaient pas être apportées en cours d'expérimentation. Au contraire, l'adaptation de la séquence d'enseignement aux processus cognitifs des élèves et la poursuite de nouvelles pistes de recherche, qui peuvent surgir en cours de route sont deux caractéristiques essentielles de l'expérimentation didactique (Steffe et Thompson, 2000).

2.6. L'apport et l'expérimentation des modifications

Les deux dernières étapes, concernant l'apport éventuel de modifications à notre séquence d'enseignement et l'expérimentation de celles-ci, ont été mises en place au fur et à mesure que la séquence d'enseignement avançait. En effet, ce sont souvent les réponses inattendues des enfants qui nous ont amené à apporter des modifications à notre séquence. Selon Steffe et Thompson (2000), ces imprévus constituent l'essence même d'une expérimentation didactique :

> « If the researchers knew ahead of time how to interact with the teaching experiments' students and what outcomes of those interactions might be, there would be little reason for conducting a teaching experiment. So, frequently, the researchers are obliged to engage in responsive and intuitive

> interactions with the students when they are, in fact, puzzled about where the interactions are headed » (p. 279).

Comme le soulignent Steffe et Thompson (2000), ce sont donc souvent les élèves qui sont à l'origine d'une modification de la séquence. Dans notre travail, les modifications ont également eu la plupart du temps un caractère spontané et ont souvent découlé d'une réponse ou d'une intervention d'un enfant. Ces modifications pouvaient se traduire par un questionnement supplémentaire ou l'ajout d'une nouvelle tâche.

2.7. Le post-test

Finalement, nous avons décidé d'inclure dans notre dispositif expérimental un post-test, qui a été réalisé, comme le prétest, sous forme d'une entrevue clinique. Ce post-test a eu lieu de cinq à dix jours après la fin de l'expérimentation didactique. Même si une expérimentation didactique n'exige pas nécessairement cette mesure, le post-test, administré au groupe expérimental, nous a fourni un aperçu de l'effet de notre séquence d'enseignement sur l'apprentissage des enfants. Bien sûr, les séances d'enseignement à elles seules nous donnaient déjà de nombreux indices quant aux progrès des participants, mais pendant celles-ci, nous poursuivions toujours un objectif d'enseignement. Par contre, le post-test servait uniquement à des fins d'évaluation. Des effets bénéfiques sur la validité de notre recherche peuvent donc découler du recours à cette mesure.

De même, comme le post-test a été effectué de cinq à dix jours après la fin des séances d'expérimentation, les résultats obtenus ont permis d'analyser si le niveau de compréhension atteint par les enfants était stable dans le temps. Comme nous allons le voir dans la section de l'analyse des données, certains enfants ont régressé lors de la passation du post-test par rapport à la dernière séance d'enseignement.

Pour nous permettre de tirer un maximum de conclusions pertinentes, les questions du post-test avaient la même structure que celles du prétest. Ainsi, elles prenaient en compte l'analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité ;

la nature et le degré de difficulté des questions correspondaient à celles du prétest. Cette approche rejoint celle de Verschaffel et De Corte (1997) qui, en utilisant une expérimentation didactique visant à favoriser la modélisation de situations mathématiques lors de la résolution de problèmes, se sont servis d'un prétest et d'un post-test du même type pour évaluer les progrès des élèves.

3. MODALITÉS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

Comme le souligne Héraud (1991), il n'existe pas de plan d'analyse préétabli pour une expérimentation didactique. Cependant, selon Kantowski (1978), les résultats de l'expérimentation didactique sont la plupart du temps rapportés sous forme d'une narration qui comprend une analyse des conduites des participants et les conclusions tirées de cette analyse.

L'analyse globale de la séquence d'expérimentation s'est faite par conséquent sous forme de narration. Comme ce sont principalement les processus cognitifs utilisés par les élèves ainsi que les caractéristiques de notre séquence d'enseignement qui nous intéressent, ces éléments constituent les éléments principaux de notre analyse.

Dans un premier temps, l'analyse des apprentissages réalisés par les enfants du groupe expérimental s'est surtout faite à l'aide des deux évaluations au début et à la fin de la collecte de données. En effet, nous avons analysé quelles sont les différences dans les raisonnements et les résultats des enfants dans le post-test par rapport au prétest. Ces différences nous informent sur la nature des apprentissages réalisés par les élèves au cours des sept semaines d'expérimentation.

Un deuxième volet, plus approfondi, concerne la compréhension des élèves. Afin de décrire comment celle-ci a évolué chez les différents participants, nous allons, d'une part, expliciter les erreurs que les élèves ont faites au cours des différentes rencontres et décrire les processus cognitifs qu'ils ont mis en place pour les surmonter et, d'autre part, soulever les faits significatifs qui sont survenus. À l'instar de plusieurs auteurs qui se sont servis d'une expérimentation didactique (entre autres Verschaffel et De Corte, 1997, Selter, 1998, Bednarz et Garnier, 1996, Saenz-Ludlow, 1995), des extraits de propos tenus par les participants seront inclus dans notre récit afin d'illustrer nos analyses. Finalement, nous allons également dresser un bilan de compréhension des différents élèves afin de rendre compte de leur évolution à travers l'expérimentation.

En ce qui concerne notre séquence d'enseignement, ce sont surtout les modifications que nous y avons apportées en cours de route qui vont être décrites et justifiées. En effet, elles peuvent fournir une indication quant à l'efficacité ou l'inefficacité de certaines stratégies d'enseignement.

4. ÉCHANTILLONNAGE

Dans la présente section, nous allons, dans un premier temps, expliquer les modalités de notre échantillonnage. Dans un deuxième temps, nous allons justifier le choix du niveau d'enseignement, et, finalement, décrire le milieu de la classe dans laquelle l'expérimentation s'est déroulée et les caractéristiques des enfants retenus.

4.1. Les modalités de l'échantillonnage

Comme nous allons le voir ultérieurement, l'expérimentation didactique peut servir comme instrument de recherche dans des classes entières, des petits groupes ou dans le travail avec des sujets individuels. Pour notre part, nous avons décidé de constituer un groupe expérimental de six élèves manifestant des difficultés de compréhension des relations d'équivalence et d'égalité et auxquels nous avons dispensé un enseignement individuel sur le signe = et les relations d'équivalence et d'égalité.

Plusieurs arguments ont guidé ces choix : Tout d'abord, comme nous avions l'intention d'analyser en détail les processus cognitifs mis en place par les élèves dans chacune des séances d'enseignement, une restriction du nombre de participants s'imposait. Avec un groupe expérimental de six enfants, nous avons été en mesure de rencontrer les participants régulièrement tout au long de l'étude. Nous nous étions fixé comme objectif de réaliser deux séances de 30 minutes par semaine avec chacun d'entre eux, sur une durée totale de cinq à six semaines. Ensuite, un groupe expérimental de six élèves nous permettait d'inclure des enfants présentant des profils d'apprentissage différents dans notre expérimentation. Dans ce contexte, nous avons retenu deux enfants classifiés comme étant forts, deux moyens et deux faibles. Un autre avantage de cette configuration était relié au retrait éventuel de participants au cours de la recherche : même lors de l'abandon d'un ou de plusieurs enfants au cours de l'expérimentation, nous avions toujours de bonnes chances de maintenir au moins un enfant de chacune des trois catégories. Finalement, au plan statistique, la prise en compte de quelques participants de plus n'aurait eu aucune incidence sur la validité et la transférabilité de la recherche.

Nous avons également décidé de ne pas avoir recours à un groupe témoin d'élèves. Un tel groupe nous aurait certes permis d'analyser les différences dans la compréhension des élèves qui ont participé à l'expérimentation didactique et de ceux qui, faisant partie du groupe témoin, n'auraient par conséquent pas assisté aux séances d'enseignement. Toutefois, l'objectif de notre recherche n'était pas de mesurer l'efficacité de notre intervention. Nous souhaitions plutôt analyser comment se déroule le processus de compréhension des relations d'équivalence et d'égalité et le recours à un groupe témoin ne nous aurait pas aidé de façon significative à atteindre cet objectif.

Ensuite, la décision d'avoir recours à des élèves qui ont effectivement des difficultés avec la compréhension des relations d'égalité et d'équivalence peut s'expliquer par le fait qu'un de nos objectifs était d'étudier comment des élèves de première année réussiraient à se construire une conception plus adéquate des relations d'équivalence et d'égalité. De même, les effets bénéfiques de notre séquence d'enseignement ont été plus importants auprès de ces élèves.

En ce qui concerne le choix des participants, nous avons d'abord sélectionné une classe de première année d'études du primaire au Luxembourg, pour laquelle à la fois l'enseignant et les parents acceptaient le principe de l'expérimentation. L'évaluation du niveau des participants et la sélection des enfants qui constitueraient le groupe expérimental a été réalisée à l'aide d'un prétest, auquel tous les élèves de la classe, dont nous avions un consentement parental ont été soumis avant le début de l'expérimentation. Pour ce prétest, nous avons eu recours à une entrevue clinique, qui nous permettait de dresser un portrait assez exhaustif de la compréhension des participants avant le début de la recherche. Il n'aurait pas été possible d'avoir des informations aussi exhaustives sur la compréhension des relations d'équivalence et d'égalité des participants en se limitant uniquement à leurs résultats scolaires ou à un test écrit.

En fonction des critères de compréhension que nous avons dégagés dans notre analyse conceptuelle de l'équivalence et de l'égalité, nous avons également énoncé des préalables que nous avons exigés de la part des participants. Ainsi, les enfants devaient avoir une compréhension assez avancée, aux niveaux intuitif, procédural et abstrait du nombre, de l'addition et des relations d'équivalence. De même, ils devaient conserver le nombre afin de pouvoir être retenus pour le groupe expérimental. Cette précaution s'est avérée nécessaire, car de la sorte, nous étions dispensés d'inclure dans la séquence d'enseignement des notions mathématiques qui ne sont pas directement reliées à l'équivalence et à l'égalité. En effet, il aurait été illusoire de travailler les relations d'équivalence et d'égalité dans un contexte d'addition avec des élèves qui n'ont pas encore saisi le sens de cette opération.

À côté de ces critères d'ordre mathématique, nous avons également tenu compte de la facilité d'élocution des participants potentiels. En effet, il importait que les participants se sentent à l'aise dans la verbalisation de leurs processus cognitifs afin de nous permettre de recueillir un maximum de données.

4.2. Le niveau d'enseignement

Les participants à notre recherche sont issus d'une première année de l'école primaire. Plusieurs arguments justifient ce choix. Tout d'abord, comme nous voulions analyser le processus de compréhension des relations d'équivalence et d'égalité au début des apprentissages numériques, les participants devaient provenir de la fin de la maternelle, de la première ou de la deuxième année d'études. Cependant, en maternelle, les enfants ne sont pas encore en mesure de réaliser des apprentissages approfondis en matière de relations d'équivalence et d'égalité, surtout sur le plan logico-mathématique. De même, en deuxième année, les élèves ont déjà réalisé de nombreux apprentissages formels sur les nombres et les structures additives. À ce moment, ils ont déjà eu l'occasion de se construire une représentation, juste ou erronée, des relations d'équivalence et d'égalité, et d'autres éléments, comme la valeur positionnelle, sont des difficultés additionnelles lorsqu'ils doivent résoudre des activités impliquant des structures additives. Par contre, en ayant recours à des enfants de la fin de la première année d'études, nous avons pu intervenir sur les représentations erronées des relations d'équivalence et d'égalité dès le début des apprentissages numériques.

Un autre avantage plaidait également pour le recours à des enfants de première année. En effet, dans une des sections antérieures, nous avons fait part de nos doutes quant à l'opportunité d'introduire le symbole d'égalité en première année d'études. Dès lors, il devenait intéressant de vérifier jusqu'à quel point nous pouvions faire avancer la compréhension des participants à notre recherche.

4.3. Description du milieu d'expérimentation

La classe que nous avons choisie pour notre expérimentation est une première année d'études de la ville de Luxembourg, avec, en tout, 13 enfants. Plusieurs particularités caractérisent cette classe. Tout d'abord, le taux d'élèves étrangers est particulièrement élevé, et parmi les 13 enfants, seulement deux sont de nationalité luxembourgeoise, une situation qui n'est toutefois pas exceptionnelle dans la capitale.

L'école en question se situe dans un quartier populaire de la ville. Ce choix est volontaire, pour éviter que des parents ayant des connaissances mathématiques plus évoluées puissent influencer leurs enfants entre les différentes séances d'apprentissage.

Un prétest a été réalisé avec douze enfants de la classe, les parents d'un enfant refusant de voir participer leur fille à notre recherche. Le prétest, ainsi que toutes les séances d'apprentissage qui ont suivi, se sont déroulés dans une salle vacante de l'école, dans laquelle nous étions seul avec l'enfant en question.

Suite au prétest, six enfants ont été retenus pour la séquence d'apprentissage en tant que telle. Ces élèves répondaient à différents critères que nous nous étions fixés. Tout d'abord, comme nous souhaitions travailler avec des élèves de différents niveaux, nous avons choisi deux élèves forts, deux moyens et deux faibles. La classification de ces élèves a été établie sur la base des résultats obtenus par ces élèves lors du prétest. Cette première évaluation a, par la suite, été corroborée par l'enseignante de la classe. Ensuite, les élèves devaient être en mesure de décrire avec facilité leurs démarches devant la caméra, et ils devaient obligatoirement éprouver des difficultés pour comprendre le signe =.

Parmi les élèves sélectionnés, trois sont des filles et trois des garçons, dont aucun de nationalité luxembourgeoise. Quatre enfants sont d'origine portugaise, un enfant est né en Bosnie, et un autre a des parents d'origine britannique et allemande. Bien que le luxembourgeois ne soit pas la langue maternelle d'aucun de ces enfants, la maîtrise de cette langue, dans laquelle s'est déroulée l'expérimentation, n'a posé aucune difficulté à cinq des enfants. Une fille, tout en comprenant le luxembourgeois, préférait s'exprimer en allemand. Ces deux langues étant très proches, nous avons décidé de lui parler en luxembourgeois, tandis qu'elle nous répondait en allemand.

5. CONSIDÉRATIONS DÉONTOLOGIQUES

Différents critères déontologiques devaient être pris en compte. Dans cette section, nous allons considérer les mesures évitant aux participants des inconvénients dus à leur absence de la classe pendant la durée de l'expérimentation, le caractère anonyme des données ainsi que le consentement libre et éclairé.

Les séances d'enseignement se déroulant pendant les heures de classe, des dispositions ont été prises tant avec les parents qu'avec l'enseignante. Ainsi, l'enseignante de la classe s'est efforcée de reprendre avec les élèves la matière étudiée en classe pendant que ceux-ci travaillaient avec nous.

De même, ces élèves continuaient à suivre l'enseignement régulier dans la classe sur les nombres et les structures additives, des retards dans l'apprentissage n'étaient donc pas à craindre.

Les participants à notre recherche resteront anonymes et le nom de l'école qu'ils fréquentent ne sera pas révélé. De même, leur nom sera, dans tous les textes issus de la collecte de données, remplacé par un nom fictif. Le lecteur ne pourra donc à aucun moment tirer des conclusions sur l'identité des participants.

Afin d'être en mesure de faire notre collecte de données, nous avions besoin d'un consentement libre et éclairé de l'enseignant de la classe, ainsi que des parents des enfants. Lors d'une réunion d'information, l'enseignante a informé les parents des objectifs de la recherche, du déroulement de celle-ci, du traitement anonyme des données, ainsi que des publications qui suivront l'analyse des données.

De même, nous avions besoin du consentement des parents pour enregistrer les rencontres avec les enfants à l'aide de matériel audiovisuel. Les participants et les parents des enfants étaient également informés qu'ils pouvaient retirer leur participation à notre recherche à tout moment, sans subir des inconvénients par la suite.

Une copie de la lettre de consentement envoyée à tous les parents de l'école se trouve en annexe.

6. PROTOCOLE DE RECHERCHE

Afin de trouver une réponse aux questions que nous nous sommes posées dans le cadre de notre recherche doctorale, nous avons procédé en différentes étapes. Tout d'abord, nous avons réalisé une analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité, en nous servant du modèle constructiviste de compréhension de Bergeron et Herscovics (1988). Cette étape s'est avérée nécessaire, puisque, d'un point de vue didactique, aucune analyse conceptuelle n'a encore été établie pour l'apprentissage des relations d'équivalence et d'égalité, du moins en ce qui concerne le niveau logico-physique. Certes, les définitions mathématiques de l'égalité, de l'équivalence et de l'équipotence existent, mais elles ne permettent pas de dégager les étapes qui interviennent lors de l'apprentissage de ces relations.

Par conséquent, le travail d'analyse conceptuelle de l'équivalence et de l'égalité à l'aide du modèle de compréhension de Bergeron et Herscovics (1988) nous a permis d'émettre des hypothèses sur les différentes étapes qui interviennent dans le processus de compréhension des relations d'équivalence et d'égalité lors des premiers apprentissages numériques. Ces hypothèses ont été à la base des différentes activités qui ont été présentées aux participants de la recherche dans le cadre de la collecte de données qui s'est réalisée sous forme d'une étude de cas multiples. Les activités se sont déroulées dans le cadre d'une séquence d'enseignement et selon les modalités d'une expérimentation didactique.

Six élèves d'une première année d'études de la ville de Luxembourg ont été retenus suite à un prétest pour notre collecte de données. Ils ont participé à une dizaine de rencontres qui ont été enregistrées à l'aide de caméras vidéo et dont un transcrit a été réalisé. Les données issues des interventions ont été soumises à une analyse qualitative.

CHAPITRE 4
SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Dans la présente section, nous allons décrire les différentes activités que nous avons proposées aux enfants dans le cadre de notre expérimentation didactique. Rappelons que nous avons réalisé un prétest avec chaque enfant de la classe, dont nous avions une autorisation parentale pour participer à notre recherche. À l'aide des résultats de ce prétest, nous avons sélectionné six élèves, qui ont participé aux séances d'enseignement, variant de six à neuf et durant chacune environ une demi-heure. De cinq à dix jours après la dernière séance d'enseignement, ces mêmes élèves ont été soumis à un post-test, visant à évaluer leur compréhension du signe = ainsi que des relations d'égalité et d'équivalence qui le sous-tendent.

1. LE PRÉTEST

1.1. Généralités

Le prétest que nous allons décrire dans les sections suivantes nous a permis de poursuivre un double objectif. D'une part, nous avons été en mesure d'évaluer la compréhension des élèves du signe = et des relations d'équivalence et d'égalité, et d'autre part, il nous a servi comme critère de sélection des six élèves qui ont participé aux séances d'enseignement.

En ce qui concerne le premier de ces objectifs, notre intention était de dresser un portrait le plus complet possible de la compréhension des différents élèves de la classe. Il ne s'agissait donc pas uniquement de les confronter à différentes tâches impliquant un langage formel, mais il fallait en plus dégager à quel point les notions sous-jacentes d'équivalence et d'égalité ont été comprises par les élèves de cette classe. Nous avons donc décidé de baser notre prétest sur l'analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité que nous avons décrite dans la section précédente. Dans ce cadre, des activités faisant appel à la compréhension procédurale, abstraite et formelle des élèves leur ont été présentées. Par contre, nous avons renoncé à les confronter à des activités faisant uniquement appel à une compréhension intuitive, puisque, à ce moment de leur scolarité, tous les enfants devraient avoir une compréhension déjà plus évoluée des relations d'égalité et d'équivalence. De plus, des enfants qui présentent encore des difficultés au niveau de la compréhension intuitive auraient certainement échoué les tâches qui servaient à évaluer la compréhension procédurale et abstraite.

Le prétest a également été pris en compte lors de la sélection des participants à notre recherche. Rappelons que cette sélection devait se baser à la fois sur l'aisance des élèves à décrire leurs démarches de résolution devant des caméras et sur leur niveau de compréhension du signe = et des relations d'égalité et d'équivalence : ils devaient obligatoirement avoir des difficultés à attribuer un sens relationnel au signe =. Par ailleurs, ils devaient avoir des prérequis concernant l'apprentissage du nombre et de l'addition : afin de pouvoir être sélectionnés pour notre groupe expérimental, les élèves devaient conserver le nombre et comprendre le sens de l'opération d'addition. Ces mesures se sont avérées nécessaires afin de nous permettre d'intervenir spécifiquement sur la compréhension du signe = et des relations d'égalité et d'équivalence, sans devoir aborder d'autres difficultés avec ces enfants.

Comme un de nos objectifs était d'évaluer les élèves, nous avons organisé les questions de manière à ce que les questions les plus difficiles soient posées au début. Selon Nantais (1992), cette mesure permet d'éviter des effets d'apprentissage lors d'une évaluation. Comme ce sont les tâches les plus difficiles qui sont présentées en premier, l'élève ne risque pas de réaliser des apprentissages au fur et à mesure que le degré de difficulté des activités augmente. Nous avons donc décidé de proposer d'abord les activités faisant appel à la compréhension formelle, pour enchaîner par la suite avec les tâches qui concernaient respectivement la compréhension abstraite et la compréhension procédurale.

Tout comme pour les activités d'enseignement, nous avons décidé d'inclure dans le prétest uniquement des exemples qui ne dépassent pas le champ numérique de 1 à 10. Cette mesure nous permet d'éviter que les enfants puissent rencontrer des obstacles cognitifs supplémentaires reliés à la valeur positionnelle et aux additions qui dépassent la dizaine. Comme nous l'avons mentionné antérieurement, nous avons choisi également de nous limiter à des structures additives, afin d'éviter les obstacles cognitifs liés aux opérations de soustraction et de multiplication.

Rappelons également que le prétest s'est déroulé sous forme d'une entrevue clinique. Ce choix méthodologique impliquait la présentation de différentes activités aux enfants et la verbalisation, par les enfants, de la démarche qui leur a permis de traiter l'activité. Les questions que nous avons posées à tous les élèves étaient préparées d'avance pour chacune des questions. Cependant, des modifications pouvaient y être apportées en cours de route, si la situation l'exigeait.

1.2. Activités du prétest

Dans le cadre de cette section, nous allons décrire les différentes activités que nous avons proposées aux enfants dans le cadre du prétest. La présentation des tâches faisant appel à la compréhension formelle sera suivie de la description des activités qui concernaient la compréhension abstraite et la compréhension procédurale.

1.2.1. Évaluation de la co mpréhension formelle

Rappelons tout d'abord que la compréhension formelle a surtout trait à la compréhension de la symbolisation mathématique, qui se base sur une certaine compréhension abstraite, procédurale et intuitive. Lors de l'analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité, nous avons déterminé trois types de tâches différentes qui faisaient appel à la compréhension formelle. Des enfants faisant preuve de compréhension formelle doivent être en mesure d'évaluer différentes égalités quant à leur justesse mathématique et pouvoir résoudre différentes équations avec une inconnue. La compréhension formelle se traduit également par la capacité de générer une équation ou égalité à partir d'une situation concrète.

Pour évaluer la compréhension formelle des enfants de relations d'équivalence et d'égalité et afin de dégager leur conception du signe =, nous avons décidé de nous référer aux deux premiers types de tâches énoncés précédemment, soit l'évaluation d'égalités et la résolution d'équations. En effet, les enfants devraient, à ce stade de leur apprentissage mathématique, être en mesure de se prononcer sur une égalité et de résoudre certaines équations, ne serait-ce que celles qui correspondent à une structure $a + b = \_\_$. Par contre, nous avons décidé de ne pas leur demander de générer des équations ou des égalités à partir d'une situation concrète, puisque cette tâche leur est probablement beaucoup moins familière.

Activité P.1.1 : Évaluer une égalité de type "a + b = c".

L'objectif de cette première activité était de déterminer le sens que les enfants attribuent au signe =. À cet effet, nous avons choisi l'égalité **"4 + 5 = 9"** et nous avons demandé aux enfants de se prononcer sur la justesse de cette égalité, présentée uniquement sous forme symbolique, et sur la signification des signes + et =.

Q 1 : Voici une addition. Est-ce que tu as déjà vu une addition comme celle-là ? Est-ce que tu peux me dire si elle est correcte ? Pourquoi penses-tu qu'elle est correcte / pas correcte ?
Q 2 : Qu'est-ce qu'il signifie, ce symbole (montrer le "+")
Q 3 : Qu'est-ce qu'il signifie, ce symbole (montrer le "=")

Il est évident que l'égalité que nous avons présentée aux enfants n'est pas très difficile à traiter en tant que telle, puisqu'elle devait être connue à la grande majorité des enfants. Cependant, notre intention ici n'était pas d'évaluer si les enfants sont en mesure de traiter une égalité de ce type, mais de dégager le sens qu'ils attribuent au signe =. Nous avons donc retenu une égalité connue par les enfants. En effet, si les enfants avaient traité plusieurs égalités d'une structure qui leur était inconnue auparavant, il aurait été possible qu'ils se posent des questions sur la signification du signe =.

Activité P.1.2 : Évaluer une égalité de type "a = b + c"

L'égalité **"7 = 3 + 4"** est la deuxième sur laquelle les enfants doivent se prononcer. Deux aspects de la compréhension peuvent être vérifiés. Nous pouvons déterminer si une éventuelle représentation du signe = comme opérateur incite un certain nombre d'enfants à refuser cette égalité. Il nous est également possible d'évaluer si des élèves ont recours à la lecture à l'envers pour justifier l'évaluation de cette égalité. Le questionnement, également utilisé dans les autres tâches dans lesquelles les enfants doivent évaluer une égalité, est le suivant :

Q1 : Est-ce que tu peux me dire si ceci est correct ? Pourquoi penses-tu que c'est correct / pas correct ?

Activité P.1.3 : Évaluer et corriger une fausse égalité de type "a + b = c", où c ne correspond pas à la somme de a et b.

Suite à la présentation de la fausse égalité **"3 + 5 = 7"**, les élèves doivent d'abord évaluer si celle-ci est correcte et justifier leur réponse. Par la suite, nous leur demandons de corriger l'erreur et de transformer cette écriture en une égalité correcte.

Cette activité nous permet de vérifier deux aspects de compréhension différents de la compréhension des élèves. Dans un premier temps, nous pouvons déterminer si les élèves se basent sur les nombres présents pour affirmer qu'il y a erreur ou s'ils tiennent uniquement compte de la forme de cette expression. Ainsi, il serait possible que des enfants acceptent cette écriture en se basant sur l'argument qu'elle est de type "a + b = c". Dans un deuxième temps, les justifications des enfants quant au caractère erroné de cette écriture et par rapport aux modifications qu'ils apportent peuvent nous donner des indices sur leur compréhension du signe =.

Activité P.1.4 : Évaluer une égalité de type "a = a"

Plusieurs recherches (entre autres Daneau, et al., 2000, et Labinowicz, 1985) ont montré qu'alors que certains élèves ont une représentation du signe = comme opérateur, ils acceptent des égalités de type a = a, en se basant sur la présence d'exactement les mêmes nombres des deux côtés du signe =. La présentation de l'égalité **"5 = 5"** nous permet de vérifier si cette attitude face à des égalités de ce type est également présente chez les participants à notre prétest.

Activité P.1.5 : Évaluer une égalité de type "a + b = c + d"

La dernière égalité sur laquelle les enfants sont amenés à se prononcer est **"3 + 4 = 1 + 6"**. Le recours à ce type d'égalité est intéressant, puisqu'il permet de vérifier certaines difficultés associées à une représentation du signe = comme opérateur. Pour pouvoir l'accepter, un enfant doit obligatoirement attribuer une signification relationnelle au signe =. Par contre, des enfants qui considèrent le signe = comme opérateur n'accepteront fort probablement pas ce type d'égalité.

Activité P.1.6 : Résoudre une équation de type "a + b = __"

La première équation que les enfants ont à résoudre est **"2 + 3 = __"**. Comme pour les tâches précédentes, où les enfants devaient évaluer différentes égalités, nous avons décidé de commencer par une structure que les enfants connaissent. Behr, Erlwanger et Nichols (1976, p. 2) avaient déjà constaté que la plupart des enfants avec lesquels ils ont travaillé ont été en mesure de résoudre ce type d'équation. L'objectif de cette activité n'est donc pas de vérifier si les enfants sont en mesure de la travailler correctement, mais plutôt de les faire exprimer leur conception du signe = dans une telle situation.

Q 1 : Voici un problème, dans lequel il manque quelque chose. Peux-tu le compléter de façon à ce que ce soit correct ? Peux-tu m'expliquer comment tu as fait ?

Q 2 : Que signifie ce signe (montrer le signe =) dans l'activité que tu viens de résoudre ?

Activité P.1.7 : Résoudre une équation de type "a = __ + c"

Lors de cette activité, les enfants doivent pour la première fois traiter une équation qui ne répond pas à la structure "a + b = __". Des enfants qui ont une conception du signe = comme opérateur sont susceptibles de rencontrer des difficultés lorsqu'ils doivent compléter "**7 = __ + 5**". Une possibilité pour ces élèves est d'avoir recours à une lecture à l'envers de l'équation, à l'instar des enfants observés par Behr, Erlwanger et Nichols (1980). Différentes erreurs, comme la transformation de l'équation en "7 = 12 + 5", où 12 est la somme des deux nombres initialement présents, sont également possibles.

La présente activité nous permet donc d'observer les stratégies auxquelles les enfants ont recours pour ce type d'activité et les erreurs que peut engendrer une conception erronée du signe =. De même, des renseignements supplémentaires quant à la signification du signe = peuvent être recueillis.

Le questionnement utilisé pour accéder aux conceptions des enfants est le même que dans la tâche précédente. Les mêmes questions seront d'ailleurs reprises pour les activités suivantes, dans lesquelles les enfants doivent compléter une équation.

Activité P.1.8 : Résoudre une équation de type "a + __ = b"

Dans le cadre de cette activité, les enfants devaient résoudre l'équation **"7 + __ = 9."** Cette équation, plus facile que la précédente, puisqu'elle s'insère dans une structure "a + b = c" et n'incite donc pas à une lecture à l'envers, comporte cependant certaines difficultés pour les enfants. Les élèves qui entretiennent une conception du signe = comme incitation à fournir une réponse risquent de ne pas être en mesure de compléter correctement cette activité. En effet, il y a déjà un nombre qui est présent à la suite du signe =, et l'inconnue est située avant ce signe.

Activité P.1.9 : Résoudre une équation de type » "a + b = __ + d"

Dans la dernière activité servant à évaluer la compréhension formelle, les participants à notre recherche devaient résoudre l'équation "6 + 2 = __ + 3". Rappelons que Saenz-Ludlow et Walgamuth (1998) et Denmark et al. (1976) avaient constaté que des enfants qui ont une représentation comme opérateur du signe = ont tendance à marquer la somme de la première addition dans l'espace vide. Cette activité nous permet donc de vérifier l'hypothèse selon laquelle les enfants qui ont une conception erronée du signe = vont effectivement transformer l'équation en "6 + 2 = 8 + 3". En même temps, les réponses des enfants ainsi que leurs explications nous permettront de recueillir des informations supplémentaires sur leur conception du signe =.

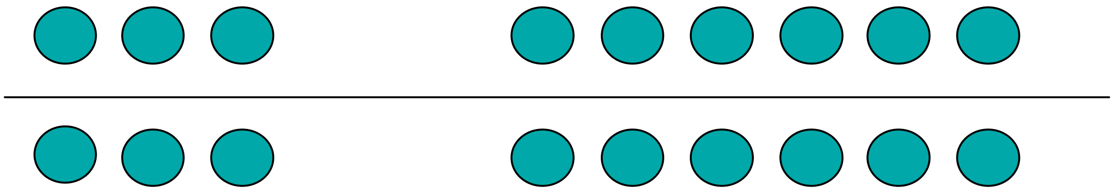
1.2.2. Évaluation de la compréhension abstraite

Lors de notre analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité, nous avons décrit différents aspects de la compréhension abstraite. D'une part, elle implique la construction d'invariants, et, d'autre part, elle concerne la réversibilité des opérations, certains pré-concepts relatifs aux propriétés des opérations, la composition de transformations, et la généralisation des apprentissages.

Ce qui nous intéresse particulièrement lors de ce prétest est de déterminer à quel point les enfants ont réussi à construire des invariants. En effet, la conservation du nombre et la capacité de justifier pourquoi une quantité ne change pas, lorsqu'on y apporte des modifications non pertinentes, était un des prérequis que les enfants devaient avoir pour être sélectionnés dans le groupe expérimental. Nous avons donc, dans cette partie, proposé différentes tâches aux enfants, dans lesquelles les enfants doivent évaluer des modifications qui n'affectent pas la quantité représentée. Toutes ces tâches font appel au palier logico-mathématique, puisque nous supposons que les enfants auront tendance à dénombrer les quantités impliquées. Leur travail ne se réalise donc pas uniquement au niveau des quantités et des ajouts, mais touche déjà les nombres et les additions.

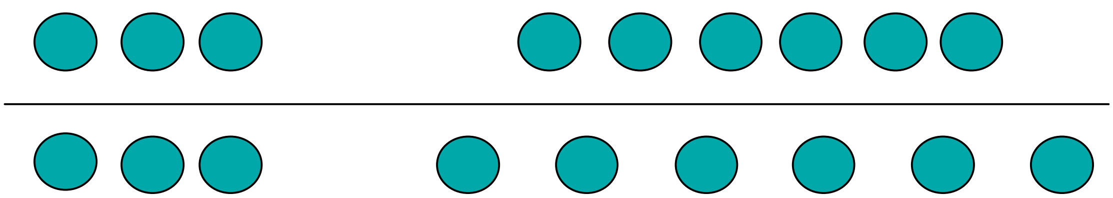
Activité P.2.1 : Évaluer une modification non pertinente apportée à une réunion de deux sous-ensembles

Afin d'évaluer à quel point les enfants sont en mesure de conserver les nombres impliqués dans une situation d'addition, nous leur proposons deux rangées de jetons, disposées de manière horizontale, l'une en dessous de l'autre, chacune des rangées représentant une situation de réunion de type "3 + 6". Conformément au schéma ci-dessous, chacune de ces rangées est formée de deux sous-ensembles de trois et six jetons, tous semblables.



Q1 : Ici, j'ai deux rangées de jetons (montrer les deux ensembles de la rangée supérieure et les deux ensembles de la rangée inférieure). Peux-tu me dire s'il y a la même chose de jetons dans les deux rangées ?

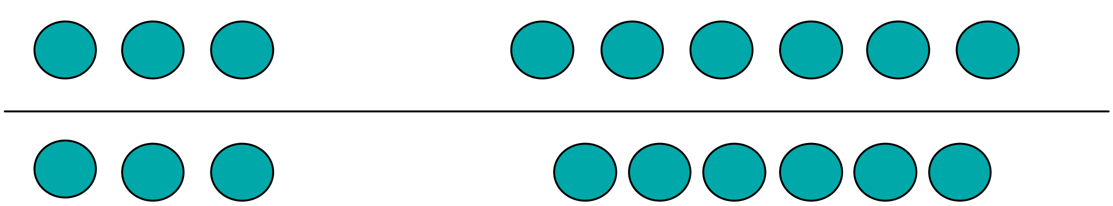
Par la suite, le sous-ensemble de six jetons dans la rangée inférieure est étiré, et les enfants doivent évaluer s'il y a toujours la même quantité de jetons dans les deux rangées.



Q 2 : Regarde, ce que je vais faire (étirement du sous-ensemble de 6 jetons dans la rangée inférieure). Est-ce que tu penses que maintenant, il y a encore la même chose de jetons ici que là (montrer les deux rangées) ? Pourquoi penses-tu cela ?

Finalement, les 6 jetons sont rapprochés de nouveau, et l'enfant doit se prononcer une dernière fois sur l'équivalence des quantités représentées par les deux rangées de jetons.

Q 3 : Et si je fais ça maintenant (rapprocher les 6 jetons), est-ce que tu penses qu'il y a encore la même chose ici que là (montrer les deux rangées de jetons). Peux-tu m'expliquer pourquoi tu penses cela ?



Activité P.2.2 : Évaluer une modification non pertinente apportée à un ensemble de jetons

Cette deuxième activité concernant la compréhension abstraite est similaire à la précédente, puisqu'elle demande encore une fois aux élèves de se prononcer sur l'apport d'une modification non pertinente à un ensemble de jetons. Cependant, nous considérons qu'elle est plus facile, puisqu'elle ne réfère pas à une situation additive, mais à la simple comparaison de deux collections.

Devant l'enfant se retrouvent deux ensembles de 7 jetons chacun. Ces jetons sont disposés de manière horizontale, et les enfants doivent juger si la même quantité de jetons est présente dans les deux ensembles. Par la suite, une des rangées est étirée, et l'enfant doit de nouveau se prononcer sur l'équivalence quantitative entre ces deux ensembles. Le questionnement utilisé est identique à celui de la tâche précédente. La réussite de cette tâche est également obligatoire pour que les enfants puissent être sélectionnés pour le groupe expérimental.

Activité P.2.3 : Test de conservation du nombre

Le test de conservation du nombre nous permet de vérifier à quel point cet aspect est acquis par les participants au prétest. Ainsi, nous présentons aux enfants une collection de 8 objets. Ceux-ci sont dénombrés par l'enfant. Par la suite, la disposition spatiale de ces 8 objets est modifiée, soit par une dispersion, soit par un rapprochement des jetons. Les enfants doivent alors se positionner sur la présence du même nombre d'éléments que dans la situation précédente. Encore une fois, les questions utilisées sont similaires à celles de la première activité visant à évaluer la compréhension abstraite.

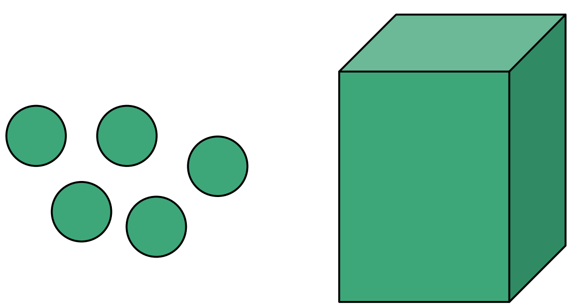
1.2.3. Évaluation de la compréhension procédurale

Dans le cadre de notre analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité, nous avons déterminé que la compréhension procédurale de ces relations fait intervenir des procédures mathématiques dans trois contextes différents. L'augmentation d'une quantité donnée et la réunion sont deux contextes dynamiques. Par contre, la comparaison de deux collections fait intervenir un contexte statique. Dans le cadre de notre évaluation de la compréhension procédurale des enfants, nous avons décidé d'inclure des activités faisant référence aux deux catégories de contextes.

Rappelons que le degré de difficulté des activités varie selon la nature de l'ensemble inconnu. Ainsi, trouver une somme ou un ensemble de comparaison dans une situation correspondant à une structure "a + b = __" est en général une tâche plus facile à résoudre pour les enfants. Par contre, trouver un des sous-ensembles ou un des termes d'une addition, comme c'est le cas dans une situation qui correspond à une structure "__ + b = c", représente un degré de difficulté supérieur.

Activité P.3.1 : Déterminer une inconnue dans une représentation sous forme d'inclusion

Dans une première activité, nous souhaitons évaluer la compréhension logico-mathématique de l'égalité dans un contexte inclusif. Devant l'enfant se trouvent 5 jetons et une boîte en carton non transparente, qui contient 3 jetons. Nous lui indiquons, qu'en tout, il y a 8 jetons. L'enfant doit déterminer combien il y a de jetons dans la boîte.



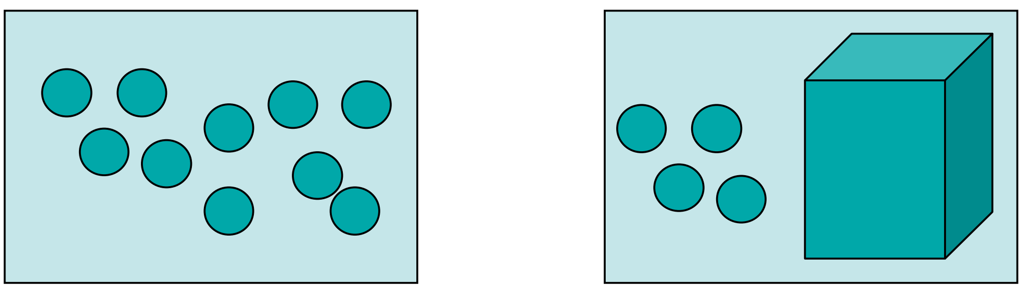
Q 1 : Devant toi, tu as des jetons et une boîte, dans laquelle il y a d'autres jetons. Si je te dis qu'en tout, il y a 8 jetons devant toi, combien y en a-t-il dans la boîte ?

Q 2 : Peux-tu m'expliquer comment tu as fait pour trouver le nombre de jetons dans la boîte ?

Activité P.3.2 : Déterminer une inconnue dans une représentation sous forme de comparaison

Dans cette activité, c'est la compréhension logico-mathématique de l'égalité dans un contexte de comparaison qui est évaluée. Tout comme dans l'activité précédente, l'inconnue est représentée par une boîte en carton non transparente, dans laquelle se trouvent un certain nombre de jetons.

Devant l'enfant se trouvent, sur le carton de gauche, un ensemble de 10 jetons et, sur le carton de droite, un ensemble de 4 jetons et une boîte en carton contenant 6 jetons qu'il ne voit pas. L'enfant est informé, qu'au total, il y a la même quantité de jetons des deux côtés et doit déterminer combien de jetons se trouvent dans la boîte en carton.



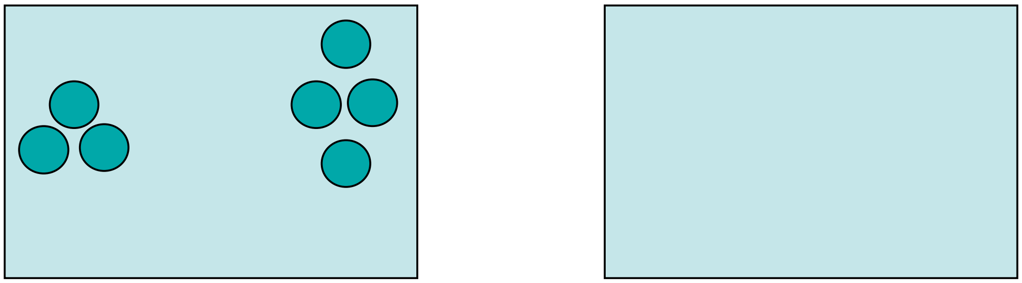
Q 1 : Si je te dis que, des deux côtés, il y a le même nombre de jetons en tout, combien de jetons y a-t-il dans la boîte ?

Q 2 : Peux-tu m'expliquer comment tu as fait pour trouver combien il y a de jetons ?

Activité P.3.3 : Déterminer une inconnue dans une représentation sous forme de comparaison

Cette activité, d'une structure très similaire à la précédente, vise encore une fois à évaluer la compréhension procédurale de l'enfant dans le contexte d'une représentation sous forme de comparaison. Elle est cependant plus facile que la précédente, puisque l'inconnue ne se situe pas sur un des termes de l'addition, mais sur la somme.

Sur le côté gauche, l'enfant retrouve deux sous-ensembles de 3 et 4 jetons. Aucun jeton n'est présent sur le côté droit. Nous demandons à l'enfant combien de jetons il doit mettre sur le côté droit si on veut qu'il y ait la même quantité de jetons des deux côtés.



Le questionnement utilisé dans cette activité est semblable à celui de la tâche précédente.

Activité P.3.4 : Rendre deux collections équivalentes

Dans cette activité, nous évaluons si l'enfant est en mesure de rendre deux collections égales. Nous lui présentons deux dessins, le premier comportant 2 poissons identiques, et le second 9 poissons, identiques à ceux du premier dessin. L'enfant doit alors ajouter des objets à l'un des dessins jusqu'à ce qu'il y en ait autant que sur l'autre dessin.

Q 1 : Ici, tu as deux dessins. Comment pourrais-tu faire pour qu'il y ait la même quantité d'objets sur les deux dessins ?

Activité P.3.5 : Former une collection équivalente à une collection de référence.

La dernière activité du prétest demande aux enfants de former une collection égale à une collection de référence que nous lui donnons. Devant l'enfant se trouvent 8 jetons. Nous lui demandons alors de former une autre collection qui contient exactement le même nombre d'objets que celle qu'il a devant soi.

Reste à rajouter que les deux dernières activités de notre prétest sont beaucoup moins complexes que celles qui précèdent. Il suffit que l'élève s'y sert d'une simple stratégie de dénombrement ou de double dénombrement. Comme la maîtrise de ces stratégies est essentielle pour comprendre le signe = comme opérateur, les activités en question ne doivent pas poser de problème aux élèves qui seront sélectionnés pour la séquence d'enseignement.

2. SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT DU SIGNE =

Dans la présente section, nous allons décrire les activités sur lesquelles nous nous sommes appuyé pour enseigner la signification du signe = à nos participants. Dans une première section, nous allons détailler les principes qui nous ont guidé dans l'élaboration de ces activités. Une deuxième section fera état des différents types d'activités employés tout au long de la séquence d'enseignement.

2.1. Principes de la séquence

Contrairement aux activités du prétest, l'objectif des activités de la séquence d'enseignement est de faire avancer la compréhension. La nature des activités proposées en est profondément modifiée. Ainsi, au prétest, les activités visent à évaluer les différents aspects de la compréhension de l'enfant à l'aide des tâches que nous avons dégagées dans notre analyse conceptuelle.

Or, ces tâches ne sont pas adaptées pour faire avancer la compréhension de l'enfant et ce, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, nous avons vu que le modèle de Bergeron et Herscovics (1988) n'est pas linéaire. Il serait donc illusoire de vouloir faire une progression dans laquelle les enfants travaillent successivement sur différents modes de compréhension. Ensuite, un des aspects centraux de notre recherche est la compréhension formelle des relations d'égalité et d'équivalence. Or, la compréhension formelle repose sur la compréhension intuitive, procédurale et abstraite et ne saurait en être isolée. Finalement, comme une des difficultés majeures des enfants est de relier une équation ou une égalité à une représentation concrète, il est important de traiter conjointement ces deux aspects pour pouvoir faire avancer leur compréhension. Nos activités de la séquence d'enseignement ne reflètent donc pas directement l'analyse conceptuelle, même si elles s'en inspirent.

Plusieurs principes ont guidé l'élaboration des activités de notre séquence d'enseignement : le traitement conjoint du langage mathématique et d'une situation concrète, l'utilisation de contextes de représentation différents, la confrontation des élèves à leurs anciennes conceptions et l'augmentation du degré de difficulté des activités présentées.

2.1.1. Traitement conjoint de la situation concrète et du langage mathématique

Le traitement conjoint de la situation concrète et du langage mathématique, le premier des principes à la base de notre séquence d'enseignement, se justifie par la nature de l'erreur que les enfants commettent par rapport au signe =. Nous avons montré dans le cadre de la problématique de recherche que les enfants ne considèrent en général pas ce signe comme un indicateur d'une relation d'équivalence. Par contre, ces mêmes enfants sont souvent en mesure de travailler avec l'équivalence au niveau d'objets concrets. Ainsi, ils n'ont pas de difficultés à déterminer si deux collections sont égales ou à rendre égales des collections. La difficulté des enfants se révèle entre autres lorsque les enfants doivent établir un lien entre une situation concrète et l'équation ou l'égalité qui représente cette situation en termes de langage mathématique.

Afin de faciliter la construction de ce lien, nous avons décidé de le rendre explicite dans le cadre de notre séquence d'enseignement. Dans la plupart des activités de notre séquence d'enseignement, l'équation ou l'égalité est accompagnée d'une représentation concrète, et le lien entre les deux est explicitement travaillé.

Cependant, lors de l'apprentissage du signe =, il ne s'agit pas uniquement d'établir un lien entre une représentation concrète et le langage mathématique. Une compréhension approfondie et adéquate du signe = exige également des enfants de se détacher des objets concrets. Ils doivent donc être en mesure d'évaluer des égalités et de compléter des équations sans que nous ne leur fournissions une représentation concrète. Ces représentations sont donc retirées progressivement au cours de la séquence d'enseignement.

2.1.2. Différents contextes de représentation concrète

Une égalité numérique de type "a + b = c" peut être représentée de deux manières différentes au plan concret. Dans le premier cas, C correspond à la réunion des deux ensembles A et B[11]. L'ensemble C n'existe donc pas séparément, mais est issu de la réunion des deux ensembles disjoints A et B et inclut ces deux ensembles. Par la suite, ce type de structure sera désigné comme une représentation sous forme d'inclusion.

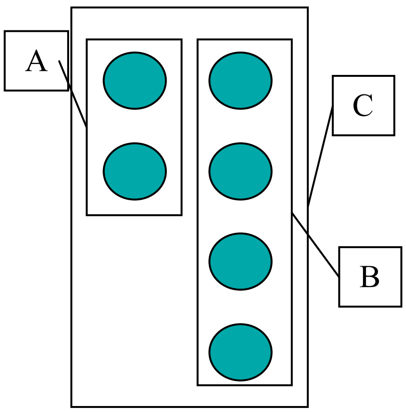


Figure 2 : Représentation sous forme d'inclusion d'une égalité de type "a + b = c"

Dans le deuxième cas, deux ensembles A et B réunis ont le même nombre d'éléments qu'un ensemble C, représenté séparément à côté. Dans ce cas de figure, l'ensemble C n'inclut donc pas les ensembles A et B au plan concret. Ce type de structure sera désigné par la suite comme une représentation sous forme de comparaison.

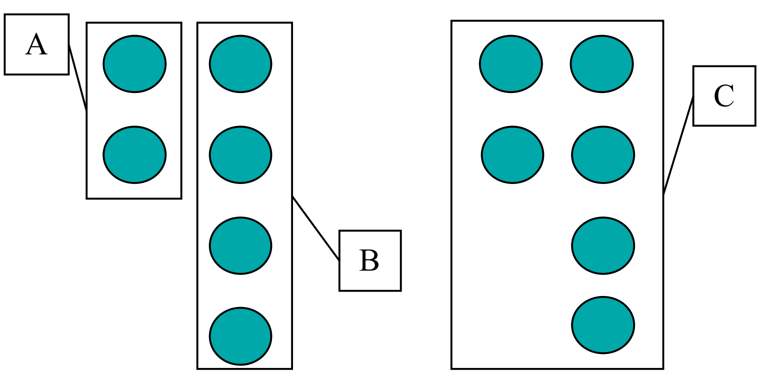


Figure 3 : Représentation sous forme de comparaison de "a + b = c"

[11] Il faut ici distinguer entre le plan numérique et le plan ensembliste. Dans la suite du texte, des nombres seront désignés par des minuscules, tandis que les ensembles qu'ils représentent seront désignés par une majuscule.

Bien sûr, si deux représentations concrètes sont possibles pour une égalité de type "a + b = c", tel est également le cas pour des équations et des égalités qui impliquent une addition, mais qui présentent une structure différente. Ainsi, pour une égalité de type "a = b + c", une représentation sous forme de comparaison impliquerait la présence d'un ensemble A, à gauche, ainsi que de deux ensembles, B et C, à droite. En revanche, la représentation sous forme d'inclusion peut se concrétiser sous forme d'une décomposition de l'ensemble A en deux sous-ensembles, B et C.

Pour les égalités de type "a + b = c + d", une représentation sous forme de comparaison impliquerait la présence de deux ensembles A et B, à gauche, et de deux autres ensembles, C et D, à droite. La représentation sous forme d'inclusion peut se faire sous la forme d'une redistribution entre deux ensembles tels qu'illustrée à la figure 4.

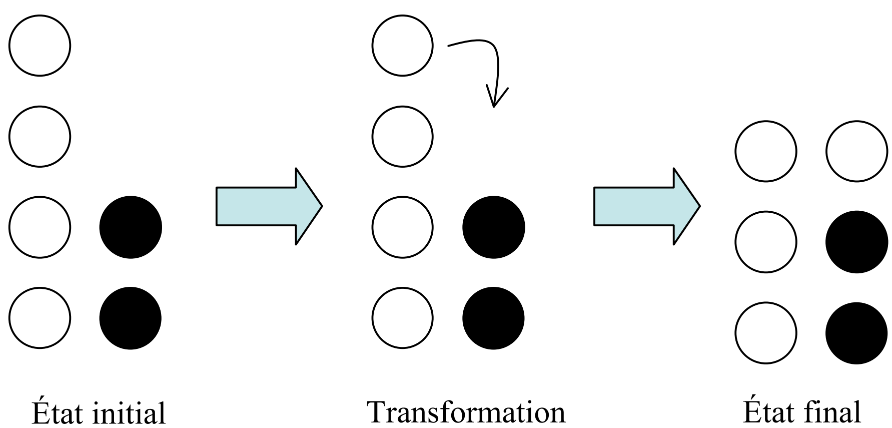


Figure 4 : Représentations sous forme d'inclusion de "4 + 2 = 3 + 3"

Dans la situation présentée, qui représente concrètement sous forme d'inclusion l'égalité "4 + 2 = 3 + 3", nous avons, au départ, une réunion de deux ensembles de 4 et 2 éléments. Par la suite, un élément de l'ensemble de 4 est transféré à l'ensemble de 2, de manière à obtenir une réunion de deux ensembles de 3 éléments.

Cette représentation représente bel et bien une situation d'inclusion, puisque le nombre total présent des deux côtés du signe = dans l'égalité "4 + 2 = 3 + 3" représente les mêmes objets physiques. En effet, les objets représentés par "4 + 2" sont exactement les mêmes que ceux représentés par "3 + 3" ; ils sont seulement répartis d'une manière différente.

En ce qui concerne le traitement de ces deux types de situation, deux éléments, à première vue contradictoires, sont importants : il est plus difficile de considérer l'égalité dans des représentations sous forme d'inclusion et, dans l'enseignement, ce type de représentation est utilisé quasi exclusivement.

Premièrement, la reconnaissance d'une équivalence ne pose pas le même degré de difficulté selon qu'elle est représentée sous forme d'inclusion ou de comparaison. Si on représente concrètement une égalité de type "a + b = c" sous forme de comparaison, on retrouve, d'un côté, les objets représentant les deux ensembles A et B, et, de l'autre côté, l'ensemble C. Dans ce cas de figure, il est relativement facile pour un enfant d'établir que la même quantité est représentée des deux côtés. En revanche, une représentation sous forme d'inclusion implique la représentation des ensembles A et B, mais l'ensemble C n'est pas représenté séparément. Il ne suffit donc plus de déterminer que le même nombre d'éléments est présent dans des ensembles distincts, mais les processus en jeu sont plus abstraits. Ainsi, l'enfant doit reconnaître que, après avoir réuni les ensembles A et B en un ensemble C, ce dernier est équivalent aux deux ensembles de départ, alors qu'il ne les a plus sous les yeux. D'ailleurs, cette difficulté n'est pas uniquement présente dans les représentations d'égalités de type "a + b = c", mais se manifeste également dans plusieurs autres structures.

Deuxièmement, même si les représentations sous forme de comparaison sont en principe plus faciles à relier à une écriture mathématique, les égalités de type "a + b = c" représentent la plupart du temps des situations d'inclusion en enseignement. En effet, la plupart des activités impliquant le signe = demandent aux enfants de déterminer la réunion de deux ensembles, représentée concrètement sous forme d'inclusion. D'ailleurs, ce phénomène pourrait, comme nous l'avons décrit dans la problématique, être un facteur parmi d'autres qui contribue au développement et au maintien d'une conception erronée à propos du signe =.

Dans le cadre de notre séquence d'enseignement, nous avons par conséquent décidé d'utiliser explicitement différents contextes de représentation. Nous escomptons en dégager deux retombées positives : elle permettra aux enfants d'asseoir les apprentissages concernant le signe = sur des bases plus solides, et elle évitera les inconvénients liés à l'utilisation quasi exclusive des représentations sous forme d'inclusion.

2.1.3. Confrontation des élèves à leur conception erronée

Comme nous l'avons vu dans le cadre de la problématique, la conception du signe = comme opérateur est fortement ancrée et persiste bien au-delà des premiers apprentissages numériques. Il est donc important que nous soyons en mesure de briser cette conception du signe = avant de demander aux enfants de lui attribuer une nouvelle signification. Deux mesures pourront nous aider à atteindre cet objectif : d'abord, les premières situations de la séquence seront construites spécifiquement pour confronter les enfants à leur conception erronée. Ensuite, des contextes de représentation différents seront utilisés, ce qui permettra de réduire la probabilité que les enfants retournent vers leur ancienne conception du signe =. Cette manière de procéder peut contribuer à éviter que les enfants commettent de nouveau les mêmes erreurs quand ils abordent des situations nouvelles.

Dans ce contexte, prenons l'exemple d'un programme d'enseignement qui présente uniquement des représentations d'égalités sous forme de comparaisons. À la fin des apprentissages réalisés dans un tel programme, les participants seraient probablement en mesure d'évaluer des égalités et de compléter des équations représentées sous forme de comparaison. Cependant, un tel programme n'aurait pas résolu un des principaux facteurs intervenant dans l'apprentissage du signe =. En effet, la plupart des situations qui incitent les enfants à se servir du signe = lors des premiers apprentissages numériques correspondent à une addition de deux ou plusieurs ensembles, dont il s'agit de déterminer le total. Or, c'est principalement dans cette situation, qui correspond concrètement à une inclusion, que les enfants construisent leur conception erronée du signe = comme un opérateur. Il est donc peu probable qu'un travail, qui se limite à des représentations sous forme de comparaison, puisse remédier aux difficultés des enfants dans des situations complètement différentes. Dans notre séquence d'apprentissage, nous avons par conséquent décidé d'aborder aussi la signification du signe = dans les situations mêmes qui ont incité les enfants à en construire une conception comme opérateur, à savoir les structures inclusives.

2.1.4. Degré de difficulté

Dans le cadre de la description du prétest, nous avons mentionné que le degré de difficulté des activités proposées aux enfants était dégressif dans le but d'éviter des effets d'apprentissage au cours de l'évaluation des enfants. Dans la deuxième partie de notre expérimentation didactique, cependant, notre objectif n'était plus d'évaluer les connaissances des élèves, mais de faire avancer leur compréhension du signe =. En conséquence, nous avons proposé des activités qui étaient à la portée des enfants ce qui impliquait que le degré de difficulté des tâches que nous leur demandions augmentait au fur et à mesure que leurs apprentissages progressaient. Dans notre séquence, quatre éléments influençaient le degré de difficulté : le type de tâche demandé, la forme de représentation concrète, le degré de difficulté lié au matériel employé, ainsi que le type d'égalité présenté.

2.1.4.1. La nature de la tâche

Une première distinction qui se retrouve dans toutes les activités proposées concerne la nature même de la tâche. Pour une structure additive donnée, nous avons proposé deux types d'activités : évaluer une égalité de ce type et compléter une équation. Dans ce contexte, l'évaluation de l'égalité est plus facile à réaliser pour l'enfant. Il suffit qu'il détermine si la même quantité est présente des deux côtés du signe = ou au niveau de la représentation concrète. Par contre, pour compléter une équation, les processus cognitifs demandés aux enfants sont plus complexes. Il ne suffit plus d'établir un constat d'équivalence, mais il faut transformer une situation ou une écriture mathématique en équivalence ou en égalité. Afin de faciliter l'apprentissage des enfants, la tâche moins complexe, soit l'évaluation, précède donc celle consistant à compléter des équations pour une structure additive donnée.

2.1.4.2. Le type de représentation concrète

La deuxième distinction concerne le type de représentation concrète utilisé. Comme nous l'avons vu dans une des paragraphes précédents, nous avons présenté deux types de représentations concrètes aux enfants : l'une sous forme d'inclusion, et l'autre sous forme de comparaison. Nous avons également dégagé qu'au niveau concret, il est plus difficile de reconnaître une équivalence ou une égalité dans les représentations sous forme d'inclusion que dans des situations représentées sous forme de comparaison. Pour une structure additive donnée, nous avons donc d'abord traité les situations de comparaison, suivies plus tard, par les représentations sous forme d'inclusion.

2.1.4.3. Le support fourni par la représentation concrète

Un troisième élément qui permet de caractériser nos activités selon leur difficulté concerne le degré d'aide apporté par la représentation concrète. Deux éléments sont à considérer : le retrait progressif des représentations, ainsi que la forme de représentation de l'inconnue.

Tout d'abord, rappelons que deux des principes de notre séquence d'enseignement consistaient à traiter conjointement l'écriture et la représentation concrète, ainsi qu'à retirer progressivement cette représentation. Au départ, toutes les situations traitées étaient accompagnées de représentations concrètes, soit sous forme de situation inclusive, soit sous forme de comparaison. La présence de ces représentations devait aider les enfants à établir une relation plus cohérente entre la symbolisation mathématique et les objets que ces symboles représentent. Afin d'habiliter les enfants à travailler sur la symbolisation mathématique, les représentations ont été graduellement retirées. L'enseignement d'une structure additive donnée étant terminé, les enfants devaient travailler uniquement à partir de l'écriture mathématique, sans l'aide d'une représentation concrète.

Les représentations concrètes ont aidé les enfants non seulement à établir une relation entre l'écrit et le concret, mais également à résoudre les différentes équations. Cependant, toutes les formes de représentation ne présentaient pas le même degré de difficulté. L'inconnue dans une équation était représentée à l'aide, soit d'un sac en plastique transparent, dans lequel l'enfant devait ajouter le nombre correct de jetons, soit d'une boîte en carton non transparente, dans laquelle se trouvait le nombre correct de jetons que l'enfant devait deviner.

Prenons l'exemple de la structure additive "$8 = \_\_ + 5$" sous forme de comparaison pour illustrer les différences entre les deux représentations et les degrés différents d'aide qu'ils apportent. L'utilisation d'un sac en plastique transparent implique la présence de 8 jetons, à gauche, et d'un sac transparent vide et de 5 jetons, à droite. L'enfant doit alors faire en sorte qu'il y ait la même quantité des deux côtés, en rajoutant des jetons et en complétant l'équation écrite. Le recours à la boîte en carton non transparente implique une représentation similaire, mais au lieu d'un sac transparent, on utilise la boîte, dans laquelle se trouvent déjà trois autres jetons. L'enfant doit alors déterminer combien de jetons sont dans cette boîte s'il sait que la même quantité est présente des deux côtés et qu'on peut mettre le signe = au niveau de l'équation écrite.

La représentation à l'aide d'un sac transparent aide davantage l'enfant à compléter l'équation, puisqu'il peut manipuler plus facilement le matériel. Ainsi, pour déterminer l'inconnue, une des stratégies consiste à ajouter des jetons un par un, jusqu'à ce que la même quantité soit présente des deux côtés. Ces stratégies deviennent cependant beaucoup plus difficiles à utiliser face à une situation similaire, dans laquelle l'inconnue est représentée à l'aide d'une boîte en carton non transparente. L'enfant n'a plus accès directement aux jetons dans la boîte et doit recourir à des stratégies qui se situent davantage au niveau numérique. Les représentations de l'inconnue à l'aide d'un sac en plastique transparent présentant un degré de difficulté moins élevé, elles ont précédé celles sous forme d'une boîte en carton pour une structure additive donnée.

2.1.4.4. La nature des structures additives

Un dernier élément qui influence le degré de difficulté des activités que nous avons proposées à nos participants concerne la nature même des structures additives. Rappelons dans ce contexte que nous nous sommes limité dans le cadre de notre recherche à présenter des additions de différents types aux enfants, et que nous avons renoncé à recourir à d'autres opérations. En général, deux types de structures sont travaillés avec les enfants : celles qui présentent une addition d'un côté du signe =, correspondant à une structure "a + b = c" ou "a = b + c", et celles qui présentent des additions des deux côtés du signe =, donc de type "a + b = c + d".

Deux raisons nous ont incité à traiter d'abord les structures présentant une seule addition. Premièrement, les enfants avec lesquels nous avons travaillé ont rarement été confrontés à des structures additives autres que celles de type "a + b = c". Il nous semblait donc logique d'articuler les premiers apprentissages concernant le signe = autour des connaissances antérieures des enfants.

Deuxièmement, les stratégies nécessaires pour travailler différentes structures additives ne présentent pas le même degré de difficulté. Par exemple, il est beaucoup plus complexe de résoudre une équation de type "a + __ = c + d" qu'une équation de type "a + __ = c". En effet, dans la dernière, le total qui doit être présent des deux côtés est directement disponible sous forme du nombre c, tandis que dans la première, il doit être déterminé à l'aide d'une opération supplémentaire. Considérant le degré de difficulté moins élevé des structures de type "a + b = c" et "a = b + c", celles-ci ont été traitées en premier.

2.2. Types d'activités

Cette partie, qui vise à montrer comment étaient construites les activités contenues dans notre séquence d'enseignement, se divise en deux sections. Une première section reprendra, sous forme de tableau, l'ensemble de la séquence. Dans une deuxième section, nous allons, à titre d'exemple, décrire une partie de la séquence de manière détaillée. Par ailleurs, l'ensemble des activités de la séquence d'enseignement, incluant les questions posées aux enfants et les pistes d'intervention, se trouve en annexe.

2.2.1. La structure générale de la séquence d'enseignement

Dans une des sections précédentes, nous avons montré que notre séquence d'enseignement s'articule autour de plusieurs principes de base qui ont été respectés tout au long de l'expérimentation. Une des conséquences en est que les tâches proposées ont une même structure de base, tout en portant sur des structures additives différentes, représentées de plusieurs manières au niveau concret.

Les tableaux 1 et 2 reprennent la structure générale de notre séquence d'enseignement. Dans le premier tableau, nous décrivons les activités sur les structures de type "a + b = c" et "a = b + c", tandis que le deuxième tableau reprend les tâches concernant les structures de type "a + b = c + d".

Le travail à l'intérieur de chacun de ces types d'égalités est structuré selon différents éléments. Tout d'abord, nous pouvons distinguer deux types de tâches. D'abord, les élèves sont amenés à évaluer des égalités, sans inconnue. Nous demandons aux enfants de déterminer si un énoncé est correct, et, le cas échéant, de transformer une fausse égalité en égalité. Au début du travail, les énoncés sont toujours accompagnés d'une représentation concrète. Celle-ci est cependant progressivement retirée. Ensuite, les enfants sont amenés à travailler des équations correspondant à la structure en question. Ici également, une représentation concrète accompagne l'équation au début.

Quand l'enfant est amené à évaluer des égalités, les situations sont représentées de deux manières différentes : sous forme de comparaison d'abord, et sous forme d'inclusion ensuite. Pour le travail avec des équations, nous avons retenu principalement des représentations sous forme de comparaison. Les représentation sous forme d'inclusion se limitent à des structures de type "a + b = c", avec inconnue ; d'autres formes d'équations, de structure "a = b +c", avec une inconnue se prêtent moins bien à une représentation sous forme d'inclusion. Par exemple, il serait peu pertinent de représenter l'équation "9 = __ + 4" sous forme d'une inclusion, ce qui impliquerait un fractionnement de l'ensemble en deux sous-ensembles. En effet, l'inconnue serait évidente tout de suite, puisque, après avoir obtenu un sous-ensemble de 4, on sait automatiquement que l'autre sous-ensemble doit contenir 5 éléments.

L'inconnue est, elle aussi, représentée de deux manières différentes : sous forme d'un sac en plastique transparent, dans lequel l'enfant doit ajouter un certain nombre de jetons, et sous la forme d'une boîte en carton non transparente qui contient des jetons, dont l'enfant doit deviner le nombre. Le degré d'aide apporté par la représentation concrète diminue progressivement, et, vers la fin du travail sur une structure, les enfants sont amenés à compléter des équations à partir de l'écriture seulement.

Finalement, nous tenons à souligner l'utilisation de deux tâches particulières. Tout d'abord, vers la fin du travail sur les structures de type "a = b + c" et "a + b = c", nous demandons aux enfants de construire eux-mêmes une équation, avec représentation concrète. L'inconnue y est représentée par une boîte en carton non transparente dans laquelle les enfants doivent insérer la quantité de jetons appropriée. Cette égalité doit également être accompagnée par une représentation formelle.

Ensuite, le travail sur les structures de type "a + b = c + d" inclut, vers la fin, une partie dans laquelle les enfants travaillent avec des énoncés qui traduisent la commutativité de l'addition. Le déroulement de ces activités est similaire à celui utilisé pour les autres structures de ce type. Ainsi, les enfants sont d'abord incités à évaluer des égalités, pour ensuite devoir compléter des équations. L'inconnue est alors représentée de différentes manières, soit à l'aide d'un sac transparent, soit par une boîte en carton. Une différence notable distingue cependant ces activités de celles qui précèdent : les nombres employés dans les différentes égalités et équations sont plus élevés et ne sont pas nécessairement connus aux enfants. Ainsi, les enfants doivent, à la fin de notre intervention, compléter "23 + __ = 45 + 23", alors qu'ils n'ont pas encore appris ces nombres. Ils ne peuvent donc pas se référer au total présent des deux côtés, et ils sont ainsi obligés à se référer à la commutativité de l'addition.

Tableau 1 : Les activités reliées à l'enseignement des structures de type "a + b = c" et "a = b + c".

Type de tâche	**Forme de représentation concrète**	**Aide apportée par la représentation de l'inconnue**
Évaluer des égalités et des fausses égalités Transformer des fausses égalités en égalités	1) Au départ : situation spécifique pour introduire une nouvelle signification au signe =	Pas d'inconnue
	2) Avec représentation concrète sous forme de comparaison	
	3) Avec représentation concrète sous forme d'inclusion	
	4) À partir de l'écriture seulement	
Compléter des équations	5) Avec représentation concrète sous forme de comparaison	5a) Inconnue sous forme de sac transparent
		5b) Inconnue sous forme de boîte en carton non transparente
	6) Avec représentation concrète sous forme d'inclusion	6a) Inconnue sous forme de sac transparent
		6b) Inconnue sous forme de boîte en carton non transparente
	7) À partir de l'écriture seulement	Pas de représentation concrète
« Inventer » une équation accompagnée d'une représentation concrète	8) Forme de représentation choisie par l'élève	Inconnue sous forme de boîte en carton non transparente

Tableau 2 : Les activités reliées à l'enseignement des structures "a + b = c + d"

Type de tâche	Forme de représentation concrète	Aide apportée par la représentation de l'inconnue
Évaluer des égalités et des fausses égalités Transformer des fausses en égalités	9) Avec représentation concrète sous forme de comparaison	Pas d'inconnue
	10) Avec représentation concrète sous forme d'inclusion	
	11) À partir de l'écriture seulement	
Compléter des équations	12) Avec représentation concrète sous forme de comparaison	12a) Inconnue sous forme de sac transparent
		12b) Inconnue sous forme de boîte en carton non transparente
	13) À partir de l'écriture seulement	Pas de représentation concrète
Évaluer des égalités et des fausses égalités qui traduisent la commutativité	14) Avec représentation concrète sous forme de comparaison	14a) Inconnue sous forme de sac transparent
		14b)Inconnue sous forme de boîte en carton non transparente
	15) À partir de l'écriture seulement	Pas de représentation concrète

2.2.2. Le début de l'apprentissage du signe =

La structure de nos activités étant la même pour les différents types d'égalités, nous n'allons pas, dans cette section, décrire l'ensemble de la séquence, mais choisir, à titre l'exemple, les activités sur les structures de type "a + b = c" et "a = b + c", représentées concrètement sous forme de comparaison (activités 1, 2, 4, 5 et 7 du tableau 1). Cette description permettra de comprendre la façon dont les autres structures et contextes de représentation ont été présentés à l'aide des tableaux de la section précédente.

Les activités concernant les structures "a + b = c" et "a = b + c", représentées sous forme de comparaison, sont regroupées en deux sections. Dans une première partie, l'enfant doit évaluer différentes égalités et fausses égalités et, dans une deuxième partie, il doit déterminer l'inconnue dans différents types d'équations.

2.2.2.1. L'évaluation d'égalités

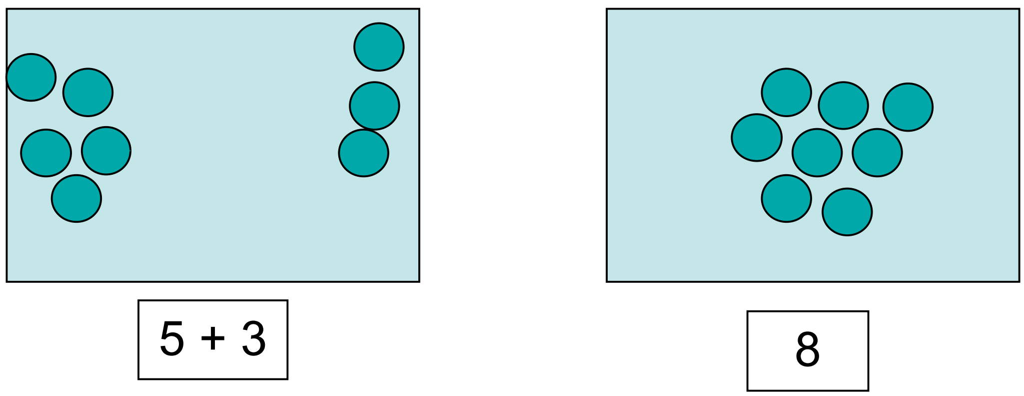
Activité 1 : Attribution d'un sens comme indicateur d'une relation d'égalité au signe =

Dès le début de la séquence d'enseignement, il est essentiel de confronter les enfants à leur conception erronée et de leur permettre d'attribuer une nouvelle signification au signe =. A cet effet, nous avons choisi de recourir à une structure de comparaison, et non pas à une inclusion. Comme il s'agit d'aider les enfants à établir un lien entre la présence de la même quantité, au concret et dans l'écriture formelle, d'une part, et la mise en place du signe =, d'autre part, une représentation sous forme de comparaison nous semblait plus adéquate. En effet, l'équivalence est plus facile à établir au niveau concret pour ce type de situation.

Les enfants sont d'abord confrontés à une représentation, sous forme de comparaison, de l'égalité 5 + 3 = 8. Afin de mieux séparer les différents ensembles, les objets qui représentent "5 + 3", des jetons de couleur et de taille identique, se trouvent sur une feuille de papier différente que ceux qui représentent "8". Les enfants doivent par la suite établir un constat d'équivalence au niveau concret et déterminer si la mise en place du signe = au niveau de l'écriture est appropriée.

Q 1 : Est-ce qu'il y a la même chose de jetons des deux côtés ? Comment est-ce que tu peux faire pour vérifier s'il y a la même chose de jetons ?

Q 2 : Est-ce que tu peux mettre les cartons qui correspondent en bas de chaque feuille ? (les enfants sont invités à choisir, parmi plusieurs cartons sur lesquels sont inscrits des additions et des nombres, ceux qui correspondent à la situation représentée) Est-ce qu'on peut mettre le signe « = » entre les deux cartons ? (l'enfant doit décider s'il peut mettre le signe = entre les deux cartons représentant "5 + 3" et "8")



Afin de vérifier quel lien les enfants établissent entre les nombres présents dans l'égalité et les quantités représentées concrètement, les enfants doivent montrer à quel ensemble correspondent les différents nombres.

Q 3 : Est-ce que tu peux me montrer où sont les 3 ? les 5 ? les 8 ?

Un changement important est par la suite apporté à la situation concrète : les deux feuilles de papier sur lesquelles se trouvent les objets concrets sont inversées, de manière à obtenir une représentation de structure "8 = 5 + 3". Les enfants doivent se prononcer à nouveau sur la question de savoir si la même quantité est présente des deux côtés et si la mise en place du signe = est justifiée.

Q 1 : Si je retourne maintenant mes deux cartons (changer les jetons et les cartons de côté), est-ce que j'ai toujours la même chose de jetons ? Pourquoi ?
Q 2 : Est-ce que je peux mettre le signe « = » entre les deux cartons ? Pourquoi ?

A ce point, des enfants qui conçoivent le signe = comme opérateur refuseront probablement d'ajouter ce signe ou, tout de moins, insisteront sur une lecture à l'envers de l'égalité. Il est donc nécessaire de leur fournir une explication plus adéquate du signe =.

Q 3 : On met le signe « = » à chaque fois que la même quantité est représentée des deux côtés. Est-ce que, ici, la même quantité est représentée des deux côtés ? Est-ce qu'on peut donc mettre le signe « = » ?

Dans le cadre de cette explication, une emphase particulière est mise sur la présence d'une égalité, à la fois dans la représentation concrète et dans l'écriture. Ainsi, nous montrons à l'enfant que, sur les deux feuilles, se trouvent la même quantité de jetons, et que les mêmes quantités sont présentes des deux côtés du signe =.

Activité 2 : Évaluer des égalités ainsi que leurs représentations concrètes

Ayant appris une nouvelle signification du signe =, les enfants sont amenés à évaluer s'il y a une égalité entre "9" et "4 + 5" et entre "2 + 3" et "6", accompagnées de leur représentation concrète sous forme de comparaison. Les questions pour les deux activités sont similaires :

Q 1 : Est-ce que, ici (montrer la situation concrète), il y a la même chose de jetons des deux côtés ? Peux-tu mettre les cartons qui correspondent en bas de chaque feuille ?

Q 2 : Est-ce qu'on peut mettre le signe = ici (montrer écriture) ? Pourquoi penses-tu qu'on peut le mettre / ne pas le mettre ?

Q 3 : (Si l'enfant déclare qu'on ne peut pas mettre le signe =) Qu'est-ce qu'il faut changer pour qu'on puisse mettre le signe = ?

Afin d'analyser les démarches de l'enfant, nous leur demandons à chaque fois de justifier leur réponse. Cette manière de procéder nous permet de vérifier quel raisonnement a amené les enfants à leur réponse et quelles sont les difficultés auxquelles ils se sont heurtés. Bien sûr, si un enfant ne réussit pas à traiter l'une ou l'autre des activités, nous lui posons des questions supplémentaires, déjà planifiées.

Pour vérifier si, confrontées à des tâches légèrement modifiées, les enfants retiennent ce qu'ils ont appris en matière de relations d'équivalence et de signe =, nous leur proposons également deux activités supplémentaires, des jetons de taille différente étant utilisés pour la représentation concrète. Une nouvelle fois, les enfants doivent évaluer une égalité (8 __ 2 + 6) et une fausse égalité (9 __1 + 7). Le questionnement est similaire à celui utilisé pour l'activité précédente.

Activité 4 : Évaluer des égalités et des fausses égalités, à partir de leur représentation concrète seulement

Dans cette activité, les enfants doivent, pour la première fois, évaluer deux égalités ("5 __ 2 + 3" et "3 + 6 __9") et une fausse égalité ("8 __ 4 + 3), à partir de leur forme écrite seulement. L'activité comprend deux parties. Tout d'abord, l'enfant doit déterminer si la mise en place du signe = est adéquate et justifier sa réponse.

Q 1 : Est-ce qu'on peut mettre le signe = ici? Peux-tu m'expliquer pourquoi ?

Par la suite, l'élève est amené à représenter l'égalité avec du matériel concret. Le type de représentation choisi par l'élève et le lien établi entre l'écriture et la situation concrète nous permet d'obtenir des informations supplémentaires sur la compréhension de l'élève.

Q 2 : Peux-tu me montrer "5 = 2 + 3" avec des jetons ?
Q 3 : Peux-tu me montrer les 5 jetons ? les 2 jetons ? les 3 jetons ?

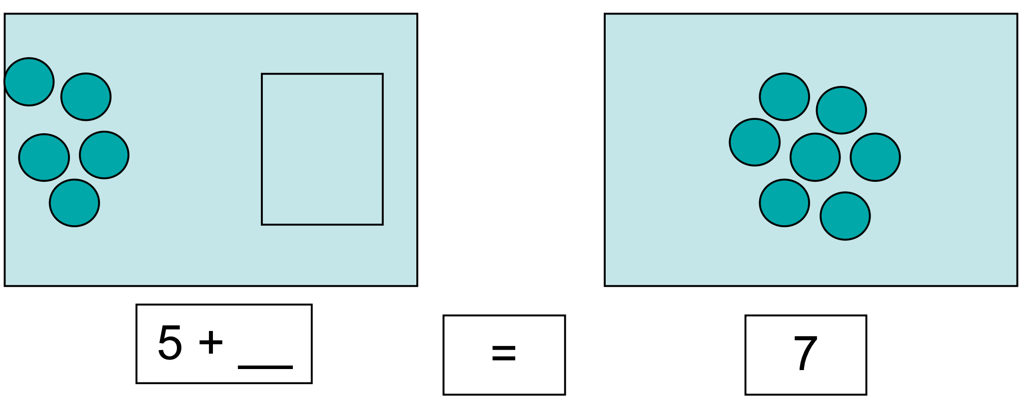
2.2.2.2. Le travail sur différentes équations

Dans le cadre de cette deuxième partie, l'introduction d'une inconnue dans les différentes équations se fait de trois façons différentes. D'abord, l'élève doit compléter, en manipulant ou en dessinant des objets, des collections de manière à ce qu'elles contiennent le même nombre d'éléments qu'une collection de référence. Ensuite, les élèves sont amenés à déterminer, sans avoir les objets sous les yeux, combien d'objets sont cachés dans une boîte en carton, en tenant compte des autres données fournies. Finalement, nous demanderons aux enfants de compléter différentes équations, à partir de l'écriture seulement.

Tout au long de cette séquence, les activités deviennent de plus en plus abstraites. Ainsi, nous débutons en ayant recours à des objets concrets que les enfants peuvent manipuler. Dès que les enfants doivent déterminer le nombre de jetons dans une boîte non transparente, les stratégies elles aussi deviennent plus élaborées : les enfants sont obligés de tenir compte des jetons qu'ils n'ont plus sous leurs yeux. Finalement, en complétant des équations à partir de leur représentation symbolique, les enfants peuvent avoir recours à des dessins ou des objets, s'ils en ont besoin, mais ils doivent eux-mêmes construire la situation concrète à partir de l'équation.

Activité 5a : Compléter des équations, présentées sous forme écrite et concrète, l'inconnue correspondant à un sac en plastique transparent

L'enfant trouve devant lui 5 jetons et un sac transparent vide, représentés sur une feuille à sa gauche, et 7 jetons, sur une feuille à sa droite. Après avoir choisi les cartons, "5 + __" et "7", correspondant à chaque côté, l'enfant doit déterminer combien de jetons il doit mettre dans le sac transparent pour justifier la présence du signe = entre "5 + __" et "7".



Q 1 : Si je mets le signe = ici (entre "5 + __" et "7", dans l'écriture), combien faut-il mettre de jetons dans le sac pour que ce soit correct ? Pourquoi ?

Q 2 : Peux-tu mettre les jetons et compléter correctement l'écriture ?

Au besoin, un ou plusieurs autres exemples de structure similaire sont réalisés avec les enfants.

*Activité 5b : **Compléter des équations, présentées sous forme écrite et concrètement, l'inconnue correspondant à une boîte en carton non transparente***

Sur le côté gauche sont représentés une collection de 6 jetons ainsi qu'une boîte en carton non transparente. Sur le côté droit se trouve une collection de 9 jetons. L'enfant est amené à sélectionner les écritures ("6 + __" et "9") correspondant à chacune de ces situations. Par la suite, il doit déterminer le nombre de jetons dans la boîte en carton si on met le signe = entre "6 + __" et "9".

Q 1 : Si je te dis qu'on peut mettre le signe = entre "6 + __" et "9", peux-tu me dire combien il doit y avoir de jetons dans la boîte ?
Q 2 : Peux-tu compléter l'écriture ?

Plusieurs autres activités de ce type sont ensuite proposées aux enfants. Le questionnement qui accompagne ces tâches sera similaire à celui décrit dans le paragraphe précédent.

*Activité 7 : **Compléter des équations, à partir de leur écriture seulement***

Plusieurs équations qui ne sont pas accompagnées d'une représentation concrète sont présentées à l'enfant. Dans ces équations, on retrouve à la fois des structures de types "a + b = c" et "a = b + c", et la place de l'inconnue varie. S'ils le souhaitent, les enfants peuvent se servir de matériel concret pour représenter eux-mêmes les équations.

Q 1 : Peux-tu compléter ces écritures de façon à ce qu'elles soient correctes ?
Q 2 : Peux-tu expliquer comment tu as fait pour trouver la réponse ?

3. LE POST-TEST

Après la séquence d'enseignement en tant que telle, un post-test a été réalisé avec tous les participants. Dans cette section, nous allons successivement exposer les objectifs poursuivis par ce post-test et en décrire le contenu et les modalités.

3.1. Les objectifs poursuivis par le post-test

Au début de notre intervention, le prétest poursuivait essentiellement deux objectifs : sélectionner les participants pour la séquence d'enseignement et évaluer la compréhension des enfants du signe =.

Est-ce que notre travail avec les élèves a modifié leur compréhension ? Pour le vérifier, nous avons effectué une deuxième évaluation, sous forme de post-test, avec les élèves qui ont participé à la séquence d'enseignement. Bien sûr, nous avons recueilli de nombreuses informations sur la compréhension des élèves et son évolution pendant que nous travaillions le signe = avec ces enfants. Ces informations étant recueillies dans un contexte d'enseignement, nous avons décidé de dresser un nouveau portrait de la compréhension des élèves dans un contexte purement évaluatif.

Ce post-test ne vise cependant pas uniquement l'obtention d'un deuxième portrait de la compréhension des élèves. Il permet aussi de déterminer à quel point la compréhension reste stable dans le temps, un certain laps de temps s'étant écoulé entre la dernière séance d'intervention et le post-test, période pendant laquelle les enfants n'ont plus travaillé spécifiquement le signe =.

3.2. Le contenu du post-test

Pour vérifier l'impact de notre enseignement, nous sommes obligé d'évaluer les mêmes aspects de la compréhension que lors du prétest, celui-ci demandant aux enfants de résoudre différentes tâches relatives à la compréhension formelle, abstraite et procédurale de l'équivalence et de l'égalité.

Dans le post-test, nous avons repris des activités visant à évaluer ces trois aspects. Les tâches proposées étaient de structure identique à celles du prétest. Seules les valeurs numériques ont été modifiées. Cette mesure nous a permis de mieux cerner quels apprentissages les enfants ont réalisé au cours de la séance.

Alors que l'objectif de notre séquence était principalement de faire avancer la compréhension formelle des participants, nous avons quand même décidé d'inclure des tâches relatives à la compréhension abstraite et procédurale dans le post-test. De cette manière, nous avons pu déterminer si le travail sur le signe = dans différents contextes de représentation a influencé la compréhension abstraite ou procédurale des enfants.

3.3. Les modalités du post-test

Les six enfants sélectionnés pour la séquence d'apprentissage ont passé le post-test. Les autres enfants de la classe, qui n'ont pas bénéficié de notre enseignement sur le signe = en sont exclus. La passation du post-test à ces enfants n'aurait pas été utile, notre objectif n'étant pas nécessairement de comparer l'effet de notre séquence d'apprentissage sur des enfants à ceux d'un groupe contrôle qui n'a pas assisté aux séances. En effet, nous souhaitions plutôt voir comment évolue la compréhension des enfants à travers les différentes tâches que nous leur proposons.

Le post-test a été effectué de cinq à dix jours après la dernière séance d'enseignement. Les délais différents entre la fin de l'enseignement et le post-test s'expliquent par le nombre de séances réalisées avec chaque élève. En effet, selon les besoins spécifiques des élèves, chacun d'entre eux a participé à 6 à 9 séances d'enseignement. Dès lors, le délai entre la dernière séance d'enseignement et le post-test a été plus court pour les enfants qui ont bénéficié d'un nombre plus élevé de séances d'enseignement.

Rappelons dans ce contexte qu'un des objectifs du post-test est d'évaluer la stabilité de la compréhension des élèves dans le temps. Bien sûr, dans notre recherche, le délai que les enfants ont passé sans travailler le signe = était assez court, ce qui limite l'efficacité du post-test. Cependant, comme nous allons le voir dans l'analyse de nos résultats, certains effets ont pu être observés quelques jours seulement après l'arrêt de l'enseignement du signe =.

CHAPITRE 5
ANALYSE DES RÉSULTATS

Dans le présent chapitre, qui reprend l'analyse des résultats que nous avons obtenus lors de notre collecte de données, nous allons décrire de manière détaillée, l'évolution de trois enfants à l'intérieur de l'expérimentation didactique. En guise d'introduction, nous allons dans un premier temps expliquer la sélection des sujets décrits et justifier la manière que nous avons retenue pour rapporter nos résultats. Dans un deuxième temps, nous allons décrire le type d'analyse employé et la structure du récit.

1. DESCRIPTION DE TROIS ÉTUDES DE CAS

Nous avons choisi d'effectuer l'analyse du travail avec trois enfants pour relater l'évolution de la compréhension du signe = de nos participants. Rappelons qu'un prétest, réalisé avec l'ensemble d'une classe de première année, nous a permis de choisir six enfants pour notre expérimentation didactique, dont deux qui ont été évalués comme forts, deux moyens et deux faibles. Ce choix nous permettait de considérer des enfants de différents niveaux. De plus, comme notre objectif était de décrire l'évolution de la compréhension d'un enfant de chaque catégorie, cette façon de faire nous procurait de fortes chances de maintenir au moins un enfant de chaque niveau, même si des enfants décidaient de se retirer de la recherche.

Finalement, aucun enfant ne s'est retiré de la recherche en cours de route. Cependant, plusieurs facteurs nous ont empêché de retenir les six enfants avec lesquels nous avons travaillés pour les fins d'analyse. Tout d'abord, un des élèves faibles que nous avions sélectionnés pour la séquence d'expérimentation ne possédait pas les prérequis nécessaires à l'apprentissage du signe =. Ainsi, au cours de l'expérimentation, nous avons dû nous rendre à l'évidence que cet enfant n'avait pas encore des connaissances assez solides du nombre et de l'addition pour effectuer la formalisation nécessaire à l'apprentissage du signe =. Ensuite, un des enfants évalués comme forts et un des enfants évalués comme moyens ont bien réussi à progresser dans la séquence, mais ont été peu expressifs tout au long de l'expérimentation, ce qui rendait l'analyse de leurs propos moins riches et plus difficiles. Nous avons par conséquent décidé de restreindre notre analyse à trois cas, ceux d'un enfant évalué comme faible, d'un enfant moyen et d'un enfant fort.

2. ANALYSE SOUS FORME DE RÉCIT

Rappelons tout d'abord qu'il n'existe pas de plan d'analyse préétabli pour une expérimentation didactique, mais que ses résultats sont généralement rapportés sous forme d'un récit. Dans ce récit, on retrouve l'analyse de l'évolution des participants tout au long de l'expérimentation.

Comme nous nous sommes intéressé à l'apprentissage et à l'évolution de la compréhension du signe = chez des enfants du début du primaire, ce sont les processus cognitifs des enfants qui seront au centre de notre analyse. Une analyse séparée a été réalisée pour chacun des trois enfants. Dans un premier temps, nous allons décrire quelles étaient les conceptions de l'enfant à propos du signe = lors du prétest.

Par la suite, c'est l'évolution de la compréhension dans le contexte de notre séquence d'enseignement qui sera au centre de l'intérêt. Nous avons choisi de décrire cette évolution à travers les difficultés que les enfants éprouvent et les obstacles cognitifs qu'ils rencontrent dans leur progression. Ainsi, nous avons regroupé, lors de l'analyse de nos données, les difficultés et les obstacles cognitifs dans différentes catégories, récurrentes à travers l'expérimentation et également d'un enfant à l'autre. Dans le récit, on retrouvera par conséquent la description de l'erreur ou de l'obstacle cognitif, les conditions dans lesquelles ils se manifestent ainsi que leur impact sur l'apprentissage du signe =.

Une dernière section sera finalement consacrée aux résultats obtenus par chacun des enfants lors du post-test. La description de ces résultats permettra d'évaluer à quel point les enfants réussissent à maintenir leurs apprentissages plusieurs jours après la fin de la séquence d'enseignement.

LE CAS DE CAROLINE

Caroline, qui a été diagnostiquée comme élève faible lors du prétest, a éprouvé de nombreuses difficultés tout au long de la séquence. Néanmoins, elle a réalisé certains progrès, qui sont cependant restés très fragiles.

Dans une première partie, nous allons voir que, lors de l'évaluation, Caroline entretient une conception très claire du signe = comme opérateur. Une deuxième partie fera par la suite état de l'évolution de la compréhension de Caroline dans la séquence d'enseignement, et des obstacles qu'elle a rencontrés. Une troisième partie, consacrée au post-test décrira finalement les résultats que Caroline y a obtenus.

CONCEPTION COMME OPÉRATEUR LORS DU PRÉTEST

Lors de l'évaluation initiale, nous avons pu constater que, pour Caroline, le signe = est un opérateur ; elle n'entretient aucun doute quant à la justesse de sa conception. Ainsi, elle applique rigoureusement cette conception à différents types d'égalités et d'équations et toutes ses erreurs commises sont cohérentes avec une telle représentation. Par ailleurs, nous ferons état des difficultés de Caroline dans les activités qui concernent la compréhension procédurale.

Pour Caroline, le signe = indique qu'une une addition est terminée et qu'il faut en noter le résultat. Ainsi, amenée à évaluer l'égalité "4 + 5 = 9", elle l'accepte, en se basant sur un schéma de question réponse. *"C'est juste, parce que 4 + 5, ça fait 9*." D'ailleurs, il semble important pour Caroline qu'une égalité réponde exactement à une structure "a + b = c" : "*C'est quand on calcule, si on a terminé avec ces signes (montre 4 + 5), on met ce signe (=), et un autre nombre*."

Cette hypothèse est confirmée lorsque Caroline est en face de l'égalité "7 = 3 + 4", qu'elle refuse d'accepter. Elle ne lit pas l'égalité à l'envers, mais change carrément les nombres et les symboles présents dans l'égalité afin d'obtenir "3 + 4 = 7". Cette transformation lui permet donc de retrouver une structure "a + b = c". Elle semble tellement fixée sur une structure de ce type qu'elle accepte l'égalité "3 + 5 = 7", en basant sa justification sur la structure de l'égalité et en ignorant les valeurs numériques. "*C'est correct. Le + ne doit pas être ici, derrière le 7, mais au milieu, avant le 5*." Du fait qu'aucune autre addition ne se trouve derrière le signe =, Caroline accepte cette fausse égalité. Sa réaction est similaire lorsqu'elle doit évaluer "3 + 4 = 1 + 6" ; son refus se base sur la forme de l'égalité, et non sur les valeurs numériques impliquées : "*Ce n'est pas correct, parce qu'il y a beaucoup de +. Il y a deux +, et il faudrait qu'il y ait uniquement un +*".

Finalement, l'égalité "5 = 5" est transformée en "5 + 5 = __". Caroline n'accepte donc pas la signification du signe = comme indicateur de deux termes identiques des deux côtés. Ceci peut paraître étonnant quand on sait que la seule occasion où le signe = est traité explicitement dans les manuels de première année du primaire au Luxembourg implique des situations de comparaison de quantités, dans lesquelles les enfants doivent insérer les symboles <, > ou = entre deux nombres. Le type de situation décrit devrait donc en principe être connu à Caroline.

Les difficultés persistent lorsque Caroline est amenée à compléter des équations. Alors que des structures "a + b = __" ne lui posent pas problème, elle devient incapable de compléter ces équations dès qu'on déplace l'inconnue. Confrontée à "7 + __ = 9", elle n'est plus en mesure de déterminer le nombre manquant. "*C'est difficile. On a déjà eu un calcul comme ça, mais je ne sais pas si c'est la même chose*." D'ailleurs, Caroline ne réussira pas à mener à terme cette activité, puisqu'elle propose successivement "4" et "3" comme inconnue.

Par la suite, c'est la structure même des équations qui empêche Caroline de les compléter correctement. La seule tentative de Caroline de trouver l'inconnue dans les équations "7 = __ + 5" et "6 + 2 = __ + 3" consiste à les ramener à des équations de structure "a + b = c".

En ce qui concerne les activités qui visaient à évaluer la compréhension abstraite de Caroline, aucun problème n'est à mentionner. Par contre, une mauvaise compréhension des consignes pourrait être la cause des difficultés que Caroline éprouve alors qu'elle doit résoudre certaines tâches relatives à la compréhension procédurale. Ainsi, Caroline est d'abord en face d'un sous-ensemble de 5 jetons et d'une boîte en carton non transparente. Elle doit déterminer combien de jetons se trouvent dans la boîte, s'il y a 8 jetons en tout. Caroline prétend qu'il doit y avoir 5 jetons dans la boîte, en fournissant une explication ambiguë, mais qui semble faire allusion aux activités précédentes, dans lesquelles deux quantités identiques étaient présentées sous différentes formes. "*C'est comme tantôt, il y en a 5 ici (montre sous-ensemble de 5) et dans la boîte, il y en a 5 aussi.*"

L'hypothèse que ce sont les activités précédentes qui ont induit Caroline en erreur est d'ailleurs confirmée lors de l'activité suivante, où la même erreur est répétée. En effet, dans une situation similaire, de structure "4 + __ = 10", représentée cette fois concrètement sous forme d'une comparaison, Caroline prétend à nouveau qu'il y a le même nombre de jetons dans la boîte que dans un des sous-ensembles. "*Comme je l'ai dit tantôt, tu en mets 4 ici (montre le sous-ensemble de 4 jetons) […] je pense qu'il y en a aussi 4 dans la boîte.*" Cependant, l'incompréhension éventuelle de la consigne n'explique pas complètement les erreurs de Caroline. Comme nous allons le voir tout au long de la description de la séquence d'enseignement réalisée avec elle, des difficultés persistent au niveau de la compréhension procédurale et l'empêchent de se construire une représentation plus adéquate du signe =.

Reste à noter que la même difficulté n'apparaît plus lorsque l'activité est légèrement modifiée. En effet, Caroline réussit à traiter facilement des activités similaires, dans lesquelles l'inconnue n'est pas représentée sous forme d'une boîte non transparente, mais où il faut ajouter un certain nombre d'éléments à un sous-ensemble pour en avoir la même quantité que dans un ensemble de référence.

Deux constats s'imposent en commentant la performance de Caroline dans le prétest. D'une part, elle conçoit clairement le signe = comme opérateur, et utilise un seul critère lors de l'évaluation de différentes égalités, soit la présence d'une structure "a + b =c". D'autre part, Caroline présente certaines difficultés lors du traitement des activités qui concernent la compréhension procédurale. Ce sont ces deux éléments, corroborés par l'avis de l'enseignante de la classe, qui nous ont amené à classifier Caroline comme une élève faible. D'ailleurs, l'image que Caroline a d'elle-même n'est pas très positive, puisqu'elle se sent moins performante que les autres enfants. Elle nous a fait part plusieurs fois de ses inquiétudes lors des séances d'enseignement. Elle a l'impression – et elle l'avoue ouvertement pendant la cinquième séance – qu'elle est plus faible que ses camarades de classe : "*Les autres enfants travaillent mieux que moi. À l'école, ils font beaucoup moins de fautes que moi.*" Par, elle semble douter de ses capacités : "*Je suis un peu niaiseuse.*"

Cependant, ces remarques négatives sur sa propre compétence en mathématiques sont extériorisées exclusivement lorsque Caroline éprouve des difficultés. Dans d'autres situations, plus faciles pour elle, son attitude change. Ainsi, lors de la quatrième séance, Caroline admet qu'elle "*aime les calculs*".

ÉVOLUTION DE LA COMPRÉHENSION DU SIGNE = PENDANT LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Comme nous allons le voir dans cette section, la compréhension du signe = évolue chez Caroline, mais de manière lente et incomplète. D'ailleurs, des séquences supplémentaires se sont avérées nécessaires et, même après la neuvième séance, nous n'avons pas encore réussi à réaliser toutes les activités prévues.

Après avoir décrit dans une première partie les réactions de Caroline qui ont suivi immédiatement l'explication de la signification du signe =, nous allons, dans une deuxième partie, faire état des difficultés qu'elle a rencontrées. D'une part, nous allons y décrire de fréquents retours vers une conception du signe = comme opérateur et, d'autre part, nous allons montrer que c'est une compréhension procédurale incomplète qui semble miner les efforts de Caroline d'attribuer une autre signification au signe =. Finalement, nous allons, dans une dernière partie, faire état des progrès que Caroline a réussi à réaliser tout au long de la séquence d'apprentissage.

1. Réactions à l'explication du signe =

Auprès de Caroline, le processus de modification de la compréhension du signe = semble se mettre en branle dès que la signification de ce signe lui est expliquée dans le cadre de la première séance d'enseignement. Immédiatement avant l'explication du signe, Caroline refuse de mettre un = entre 8 et 5 + 3. "*On ne* *peut pas mettre un =, parce que dans notre livre, ça ne marche pas.*" D'ailleurs, ce refus se base sur une incompréhension de l'écriture, puisque, dans la situation concrète de comparaison qui accompagne cette égalité, Caroline est en mesure de déterminer qu'il y a toujours la même quantité qui est représentée des deux côtés.

Tout de suite après que nous avons expliqué à Caroline que le signe = indique que la même quantité est présente, celle-ci accepte de placer un = dans la même situation. Cependant, Caroline insiste pour lire l'égalité de droite à gauche. "Je commence ici (à droite), parce que comme ça (montre 8 = 5 + 3), c'est à l'envers. On ne peut pas calculer comme ça."

Cette réaction est intéressante à deux égards. D'une part, Caroline accepte de mettre un signe =, mais elle insiste sur une lecture qui retransforme l'égalité en une structure a + b = c. On peut donc affirmer que Caroline n'attribue pas encore au signe = une signification d'indicateur d'une relation. D'autre part, c'est ici la première fois que Caroline utilise une stratégie de lecture à l'envers. En effet, tout au long du prétest, elle réfute des égalités de structure a = b + c ou elle les retranscrit complètement pour en arriver à une structure du type a + b = c. Comme la stratégie de lecture à l'envers apparaît lors d'une première étape vers une compréhension plus adéquate du signe =, il serait intéressant de savoir si cette stratégie constitue une étape intermédiaire dans la construction de la signification du signe =.

Dans la situation suivante, deux sous-ensembles de 4 et 5 jetons sont représentés à droite, et un sous-ensemble de 9 jetons à gauche. Cette situation de comparaison est accompagnée de l'écriture correspondante, et Caroline accepte de mettre un signe = entre "4 + 5" et "9". Par la suite, les cartons et l'écriture sont inversés, de manière à retrouver une situation de structure "9 = 4 + 5". La justification que Caroline fournit lorsqu'elle explique les raisons qui l'ont amenée à maintenir le signe = laisse entrevoir pour la première fois une compréhension du signe = comme indicateur de relation. "*On peut mettre = quand on calcule, et quand on fait d'autres choses aussi, mais on peut uniquement le mettre quand il y a la même chose.*" Cependant, la mise en place de ce signe semble encore étroitement liée à l'utilisation de calculs mathématiques.

2. Retour fréquent des mêmes erreurs que celles observées lors du prétest

Comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants, Caroline refait fréquemment les mêmes erreurs que celles que nous avons pu observer lors du prétest : elle retourne vers une conception du signe = comme un opérateur, et utilise des stratégies erronées lors de la résolution des différentes activités.

2.1. Retour vers l'ancienne conception du signe =

Chez Caroline, le retour vers une conception du signe = comme opérateur se manifeste de deux manières différentes. Tout d'abord, elle a tendance à lire à l'envers différentes égalités pour les ramener à des structures du type "a + b = c". Ensuite, certaines situations l'incitent à modifier complètement l'équation décrite afin de retrouver le même type de structure.

Dans cette section, nous allons décrire ces deux types d'erreurs ainsi que leurs caractéristiques respectives. Ainsi, nous allons voir que ces erreurs se retrouvent fréquemment, mais pas exclusivement lors de l'introduction de nouvelles structures additives. De même, nous allons dégager que la fréquence de ces erreurs ne diminue que lentement entre le début et la fin de la séquence d'enseignement.

2.1.1. Recours à une lecture à l'envers d'une égalité

Au début de la construction d'une représentation du signe = comme indicateur d'une relation, Caroline accepte des structures additives non conventionnelles, mais a tendance à recourir à une stratégie de lecture à l'envers. Ainsi, Caroline accepte, alors que le signe = a été introduit dans la première séance, l'égalité "5 = 2 + 3", mais la considère encore comme une addition à l'envers. "*Même si c'est dans le sens inverse, c'est toujours la même chose.*" Caroline justifie donc la mise en place du signe = par la présence de la même quantité des deux côtés, mais pense toujours en termes d'une structure "a + b = c".

Cette tendance devient encore plus évidente, au début de la deuxième séance, lorsque Caroline tient carrément à une lecture à l'envers de l'égalité "7 = 3 + 4". Dans cette situation, présente sous forme écrite et représentée concrètement par une comparaison, Caroline accepte de mettre le signe =, en se basant sur la présence de la même quantité des deux côtés. "*Il y en a 7 ici (montre les jetons sur la feuille de gauche), et il y en a 7 ici (montre les jetons sur la feuille de droite). Tout est correct*." Par contre, elle entretient des doutes quant au sens de la lecture de l'égalité. "*Est-ce que je peux le lire comme ça aussi (de droite à gauche) ?*". Questionnée sur les raisons d'une telle inversion, Caroline la justifie par la structure de l'énoncé. "*Dans un calcul, nous ne lisons pas 7 = 3 + 4, parce que sinon, on pourrait croire que c'est le 7 qui égale quelque chose. […] On ne peut pas le lire comme ça, sinon, on pourrait croire qu'il y a un 7, un =, et le calcul seulement après*."

Dans son commentaire, Caroline garde le souci de transformer l'égalité en une structure "a + b = c" et maintient, au moins en partie, une conception du signe = comme opérateur. En effet, les termes choisis par Caroline ("*on pourrait croire que le 7 égale quelque chose*") pourraient être interprétés dans le sens qu'elle est d'avis que "7" n'est pas une question comme "3 + 4" pourrait l'être. En même temps, cette remarque nous fournit un autre indice de la cohabitation possible de deux conceptions différentes du signe =.

Cette hypothèse est d'ailleurs renforcée tout de suite après la situation que nous venons de décrire. Ainsi, avec le même exemple, Caroline accepte l'expression "7, c'est la même quantité que 3 + 4", mais insiste toujours sur la lecture à l'envers. D'ailleurs, cette difficulté semble essentiellement liée à l'écriture de l'égalité. En effet, lorsque Caroline était amenée à déterminer dans la situation concrète de comparaison qui accompagne l'égalité s'il y a la même quantité des deux côtés, elle considère d'abord les jetons sur la feuille de gauche, et après ceux de la feuille de droite. Il n'y a donc pas d'inversion du sens de travail dans cette situation.

Caroline inverse à nouveau le sens de la lecture lors de la quatrième séance, lorsqu'elle doit résoudre pour la première fois une équation, en s'appuyant uniquement sur l'écriture. Caroline n'éprouve aucune difficulté à déterminer la valeur de l'inconnue dans "7 = 2 + __". Cependant, lorsqu'elle doit lire l'égalité en question, elle inverse le sens de lecture et obtient ainsi une structure de type "a + b = c", sans être en mesure d'expliquer les raisons qui l'amènent à avoir recours à cette stratégie. D'ailleurs, un phénomène similaire se produit lorsque nous lui demandons de représenter concrètement, avec des jetons, la situation en question.

Celle-ci correspond alors à une réunion de deux sous-ensembles de 2 et 5 objets en un ensemble de 7 objets, alors que l'égalité présentée traduit plutôt une décomposition d'un ensemble de 7 en deux sous-ensembles. Une inversion du sens de la lecture peut donc également être à la base de cette transformation de la structure.

2.1.2. Transformation de la structure additive

Caroline transforme une addition en une structure "a + b = c" dans deux types de situations : lorsqu'elle doit transformer une fausse égalité de structure "a = b + c" en une égalité, mais surtout lorsqu'il y a présence d'additions des deux côtés du signe =.

Il est à noter que la transformation en une structure "a + b = c" n'apparaît qu'une seule fois dans le premier type de situation. Lors de la première séance, Caroline doit évaluer si elle peut placer le signe = entre "8" et "4 + 3", représentés concrètement comme comparaison, et sous la forme écrite. Éprouvant quelques difficultés à résoudre la situation, sur lesquelles nous allons revenir ultérieurement, Caroline admet qu'on ne peut pas mettre un signe =. Lorsque nous la questionnons sur les moyens qu'on pourrait utiliser pour transformer la situation en une égalité, elle propose d'abord d'enlever le signe = et, par la suite, de modifier l'écriture en "5 + 3 = 8". Caroline a donc compris qu'il faut changer les valeurs numériques impliquées. Cependant, elle modifie également la structure de l'énoncé. Il est plus difficile de savoir dans ce contexte si elle le fait par commodité ou si une réelle incompréhension est à l'origine de ses actes. En effet, nous avons omis de vérifier si Caroline accepte également l'écriture "8 = 5 + 3".

Caroline transforme également et surtout une égalité en une structure "a + b = c" lorsqu'elle doit traiter des égalités de structure "a + b = c + d". Comme nous allons le voir à l'aide d'un premier exemple, elle agit ainsi dès l'introduction d'une première activité de ce type. Dans la situation en question, deux sous-ensembles de 5 et 3 éléments sont représentés à gauche de Caroline, et deux autres sous-ensembles de 6 et 2 à sa droite. Cette représentation concrète est accompagnée des additions respectives. Initialement, Caroline accepte de mettre un signe = et base sa justification sur la présence de la même quantité de jetons des deux côtés.

Cependant, sa compréhension ne semble être que partielle, puisque Caroline transforme l'égalité "5 + 3 = 6 + 2" en "3 + 3 = 6 + 2" lorsque nous lui demandons de lire l'égalité. Caroline ignore donc les nombres écrits pour transformer l'égalité en une structure "a + b = c". Cette situation est d'autant plus significative que, par la suite, Caroline n'accepte plus la mise en place du signe =.

Il ne s'agit pas ici d'un incident isolé, puisque Caroline essaie de transformer l'égalité "4 + 6 = 3 + 7" en une structure qui permet de tenir compte d'une conception du signe = comme opérateur. Dans cette situation, où Caroline doit décider si on peut mettre le signe =, sa première stratégie est d'additionner tous les nombres présents dans l'égalité.

La même stratégie est répétée dans une des activités suivantes. Lorsque Caroline doit évaluer si on peut mettre un signe = entre "3 + 1 + 2" et "4 + 2", elle commence par additionner tous les nombres présents. Cette stratégie est intéressante à deux niveaux. Elle traduit le souci de Caroline de retrouver une structure dans laquelle il y a uniquement un nombre derrière le signe = et qui exprime le total des nombres avant le signe =. De plus, elle ne se limite pas exclusivement à l'écriture. Lorsque nous demandons à Caroline de montrer avec les jetons s'il y a la même quantité des deux côtés, elle détermine également le total des jetons présents, et ce alors qu'elle a réussi à représenter correctement l'égalité comme comparaison.

Le même type d'erreur réapparaît lorsque nous travaillons les équations dans lesquelles on retrouve des additions des deux côtés du signe =. Ainsi, en face de "4 + 2 + 1 = 5 + __", la première réaction de Caroline traduit son retour vers une conception du signe = comme opérateur : "*Pour qu'il y en ait 5 en tout ?*" Dans cette situation, elle ne recherche donc pas d'avoir la même quantité des deux côtés, mais elle se réfère à une compréhension du signe = comme opérateur.

À la fin de la huitième séance d'enseignement, Caroline en revient à une conception similaire du signe =. Nous demandons à Caroline de monter elle-même une équation de structure "a + b = c + d" avec une inconnue et de la représenter de manière concrète, les jetons correspondant à l'inconnue étant cachés dans une boîte en carton. Nous lui spécifions que l'exemple doit être construit de manière à ce que nous puissions déterminer combien il y a de jetons dans la boîte en carton. L'exemple que Caroline met initialement en place pourrait traduire un retour vers une conception du signe = comme opérateur. Elle met deux sous-ensembles de 3 jetons chacun sur la feuille de gauche ; à sa droite, elle place la boîte, dans laquelle elle a inséré 6 jetons, et un sous-ensemble de 5 jetons. La structure initiale de l'égalité correspond par conséquent à "3 + 3 = 6 + 5", et on retrouve une situation où le nombre qui suit immédiatement le signe = correspond au total des nombres qui le précèdent. Cependant, Caroline modifie par la suite cette situation, en ajoutant un jeton à un des sous-ensembles de 3 éléments, à gauche. Il devient donc plus difficile de déterminer si la configuration du départ est attribuable à une compréhension du signe = comme un opérateur ou à d'autres facteurs.

Mentionnons que, une seule fois, Caroline a transformé une égalité lorsqu'elle avait à traiter une équation de structure "a = b + c." En effet, ses explications permettent de déduire qu'elle se sert de cette stratégie pour résoudre "10 = 7 + __". "*C'est difficile… 7 + 3 = 10.*" La particularité de cette stratégie est cependant ici qu'elle permet de compléter l'équation en question sans obtenir un résultat erroné.

2.2. Caractéristiques de l'erreur

Chez Caroline, le retour vers une conception du signe = comme opérateur est caractérisé par différentes particularités. D'une part, la lecture à l'envers et la transformation de la structure apparaissent dans des situations différentes, souvent lors de l'introduction d'un nouveau type d'activité. D'autre part, la fréquence de l'erreur de revenir vers l'ancienne conception du signe = diminue lentement, mais elle reste présente même à la fin de la séquence d'enseignement.

2.2.1. Situations qui mènent au retour vers l'ancienne compréhension

Comme nous avons pu le montrer dans les paragraphes précédents, Caroline se sert de l'inversion du sens de la lecture, afin de ramener des égalités non conventionnelles à une structure "a + b = c". Or, cette stratégie, qui est toujours basée sur une incompréhension du signe = et de l'égalité en question, apparaît uniquement dans des égalités de structure "a = b + c". En effet, c'est uniquement dans ce type de situation que la lecture à l'envers permet effectivement de transformer l'égalité de la manière désirée. La même stratégie ne donne pas de résultat avec une structure "a + b = c + d".

Dans ce dernier cas, c'est la transformation de l'égalité qui est utilisée par Caroline dans certaines situations. Tel est le cas par exemple de "5 + 3 = 6 + 2", modifié en "3 + 3 = 6 + 2", de manière à ce que le premier nombre derrière le signe = corresponde à la somme des deux nombres qui le précèdent. D'autres activités par contre incitent Caroline à faire la somme de tous les nombres présents dans l'équation, stratégie qui permet également de retrouver un seul nombre derrière le signe =. Nous pouvons donc constater que ces deux types de stratégies sont utilisés exclusivement lorsque des additions sont présentes des deux côtés du signe =. En effet, dans tous les autres types d'activités, la même stratégie n'apparaît pas.

Les deux types de retour vers une conception du signe = comme opérateur ont cependant un point en commun. Ils apparaissent souvent lors de l'introduction d'une nouvelle structure additive, qui n'a pas encore été traitée précédemment. Ainsi, le recours à une lecture à l'envers est très présente immédiatement après l'explication du signe = comme indicateur d'une relation d'égalité lors de la première séance. Il s'agit donc ici d'une situation que, précédemment, Caroline n'a pas connue.

Il en est de même lorsque Caroline utilise une deuxième fois l'inversion du sens de la lecture. Lors de la quatrième séance, elle inverse les premiers exemples qui lui demandent de traiter des équations du type "a = b + c", avec une inconnue et en ayant uniquement devant elle la forme écrite.

L'égalité est fréquemment transformée en une structure "a + b = c" lors de l'introduction de nouvelles structures. Nous avons décrit dans les paragraphes précédents que Caroline transforme "5 + 3 = 6 + 2", représenté concrètement comme comparaison et sous forme écrite en "3 + 3 = 6 + 2". Or, il s'agit ici de la première fois que nous abordons avec Caroline des structures de ce type.

La situation est analogue un peu plus tard, quand Caroline doit décider si elle peut placer un signe = entre "3 + 1 + 2" et "4 + 2". Rappelons que dans cette situation, Caroline fait la somme de tous les nombres présents. Or, il s'agit ici de la première fois dans la séquence d'enseignement que nous lui présentons une addition avec trois termes.

La situation est similaire pour les autres erreurs de ce type. Ainsi, lorsque nous demandons à Caroline de monter elle-même une équation de structure "a + b = c + d", il s'agit de la première fois qu'une telle tâche lui est demandée.

2.2.2. Diminution lente de la fréquence de cette erreur

Si Caroline retourne fréquemment vers une conception comme opérateur du signe = à l'occasion de l'introduction de nouvelles structures, tel n'est pas toujours le cas. D'ailleurs, nous avons pu remarquer que le recours à ces stratégies ne s'estompe que graduellement. Ainsi, Caroline utilise une lecture à l'envers immédiatement après l'explication du signe =, mais elle y a encore une fois recours au début de la deuxième séance, alors qu'elle a lu plusieurs égalités de structure "a = b + c" correctement entre les deux événements. Il faut cependant concéder que les deux événements ne se situent pas dans la même journée. Il est donc possible que Caroline ait oublié une partie des apprentissages réalisés lors de la première séance.

La situation est similaire alors que Caroline a résolu pour la première fois, à partir de l'écriture seulement, des équations de structure a = b + c. En effet, dans les paragraphes précédents, nous avons montré que Caroline inverse le sens de la lecture lorsqu'elle est amenée à lire "7 = 2 + 5".

La transformation d'une égalité en une structure "a + b = c" ne se situe pas non plus exclusivement au début d'un nouvel apprentissage. Ainsi, quand Caroline essaie d'additionner tous les nombres présents lorsqu'elle doit évaluer "4 + 6 = 3 + 7", représenté concrètement et sous forme écrite, cette situation n'est pas nouvelle pour elle.

Par ailleurs, la fréquence des retours vers une conception comme opérateur ne diminue pas vraiment tout au long de la séquence d'enseignement. En effet, cette erreur est encore présente lors des dernières séances que nous avons passées avec Caroline.

Comme nous allons le voir dans les prochains paragraphes, il ne s'agit pas non plus de la seule difficulté que Caroline a rencontrée dans son cheminement vers une compréhension plus adéquate du signe =. Nous allons montrer qu'une compréhension procédurale insuffisante contribue probablement aux difficultés de Caroline.

3. Recours fréquent à des stratégies erronées

Caroline, et c'est caractéristique pour elle, utilise fréquemment, tout au long de la séquence d'enseignement, des stratégies de manipulation non pertinentes. Dans le cadre de cette section, nous tentons de classifier les difficultés reliées à ces stratégies en deux catégories :

- les stratégies liées à la compréhension procédurale des additions et dont l'utilisation engendre parfois des difficultés lors du cheminement vers une compréhension plus adéquate du signe =,
- les stratégies erronées résultant directement d'une mauvaise compréhension du signe = déjà présente avant le début de la séquence d'enseignement, et dont Caroline éprouve des difficultés à se défaire.

3.1. Les difficultés liées à une compréhension procédurale insuffisante

Comme nous allons le voir dans cette section, Caroline dispose d'un éventail de plusieurs stratégies additives différentes qui peuvent lui être utiles dans le cadre des activités que nous lui proposons. Cependant, elle n'est pas toujours en mesure d'utiliser ces stratégies efficacement. Dans une première étape, nous allons décrire la réticence de Caroline à se servir d'une redistribution des jetons à l'intérieur des sous-ensembles pour résoudre les différentes activités. Une deuxième partie servira par la suite à cerner les difficultés de Caroline à utiliser la stratégie de redistribution du matériel.

3.1.1. Réticence de Caroline à avoir recours à la redistribution des jetons

La redistribution du matériel concret peut être un moyen très efficace pour résoudre facilement différentes activités en relation avec la compréhension du signe =. Par exemple, pour montrer que deux ensembles de 6 et 3 représentent la même quantité que deux sous-ensembles de 5 et 4, il suffit de transférer dans la première paire de sous-ensembles un jeton de l'ensemble de 6 vers l'ensemble de 3 pour voir de manière très concrète que la même quantité de jetons est présente des deux côtés. Une stratégie similaire peut également être utilisée lorsqu'il s'agit de compléter différentes équations, accompagnées d'une représentation concrète.

En principe, Caroline connaît la stratégie de redistribution des jetons, et ceci n'est pas un effet de notre enseignement, car elle y a déjà recours au cours de la première séance, avant l'explication du signe =. Dans la situation en question, Caroline doit déterminer si deux sous-ensembles de 5 et 3 jetons sont équivalents à un ensemble de 8 jetons. Pour justifier sa réponse affirmative, Caroline sépare dans cette situation l'ensemble de 8 en deux sous-ensembles de 5 et 3, de manière à obtenir exactement les mêmes sous-ensembles sur les deux feuilles.

Caroline recourt spontanément à une redistribution des jetons lors de la troisième séance, alors qu'elle est amenée pour la première fois à compléter une équation, sous forme écrite et représentée comme comparaison. La structure "5 + __ = 8" est représentée par un sous-ensemble de 5 jetons et un sac transparent vide à gauche ainsi qu'un ensemble de 8 jetons à droite. Caroline doit déterminer combien de jetons elle doit ajouter dans le sac pour qu'il y ait la même quantité des deux côtés du signe = et qu'on puisse mettre le signe =.

Dans un premier essai, Caroline sépare le sous-ensemble de 8 en deux ensembles de 4, mais, après s'être rendu compte de son erreur, elle redistribue les jetons à sa droite de manière à obtenir deux sous-ensembles de 5 et 3 jetons. Si la deuxième tentative se déroule sans difficultés majeures, l'explication de Caroline laisse perplexe : "*J'ai triché pour trouver*". C'est par ces termes que Caroline va désigner la stratégie de redistribution tout au long de la séquence d'enseignement.

D'ailleurs, Caroline manifeste à plusieurs occasions sa réticence à utiliser cette stratégie. Son malaise se manifeste alors par une gêne prononcée lorsqu'elle explique qu'elle a recours au "trichage". Dans d'autres circonstances, elle essaie de cacher le recours à cette stratégie en insistant qu'elle a fait un calcul mental pour trouver la situation : "*Je n'ai pas calculé avec mes doigts, et je n'ai pas touché aux jetons. J'ai juste pensé*." Ces essais sont tellement évidents que nous nous sommes posé la question si ses parents ou l'enseignante auraient interdit à Caroline de se servir de matériel ou de ses doigts lors de la résolution de problèmes mathématiques. Cependant, lorsque nous abordons le sujet avec Caroline, celle-ci affirme que tel n'est pas le cas.

Alors que Caroline se trouve mal à l'aise en ayant recours à la stratégie de séparation des jetons, elle l'utilise dans certains types de situations tout au long de la séquence. Lorsqu'elle s'en sert pour compléter des équations de structure "a + b = c" ou "a = b + c" avec une inconnue, elle est en général efficace. Dans ce cas, elle procède sensiblement de la même manière que dans l'exemple que nous avons décrit antérieurement. Par contre, Caroline ne se sert pas de cette stratégie dans toutes les situations où ce serait possible, et elle a également recours, comme nous allons le voir ultérieurement, à différentes autres stratégies.

3.1.2. Utilisation pas toujours correcte de la redistribution des jetons

Si Caroline est souvent en mesure de recourir à la séparation des jetons pour résoudre des équations de structure "a + b = c" ou "a = b + c" avec une inconnue, tel n'est pas le cas dans toutes les situations de ce type. De plus, elle éprouve plus de difficultés quand il s'agit de traiter des équations de structure "a + b = c + d". Dans cette section, nous allons voir que ces erreurs, liées à une compréhension procédurale de l'addition et de l'équivalence déficiente, l'empêchent de compléter correctement ces équations. Par ailleurs, l'effort cognitif que ces activités et le recours à une redistribution des jetons exigent semble être très élevé pour Caroline, puisque la facilité de procéder de cette façon dépend beaucoup de son état d'esprit. Certains jours, elle a de grandes difficultés à traiter des activités que pourtant elle a résolues avec facilité antérieurement.

Ainsi, au début de la quatrième séance, Caroline n'utilise plus la stratégie de redistribution de manière cohérente. Elle doit compléter "3 + __ = 8", représenté sous forme écrite et comme comparaison, l'inconnue étant représentée par un sac transparent dans lequel Caroline doit ajouter la quantité correcte de jetons. La stratégie que Caroline utilise alors traduit sa volonté d'avoir recours à une redistribution des jetons, mais elle n'arrive pas à mettre la même quantité de jetons des deux côtés. Elle sépare l'ensemble de 8 jetons sur sa droite en deux sous-ensembles de 3 et 5, et transfère 5 jetons de l'ensemble de droite dans le sac, à gauche. Caroline a donc réussi par cette stratégie à déterminer l'inconnue, mais elle n'est pas en mesure de transformer la situation de manière à ce qu'il y ait la même quantité de jetons des deux côtés du signe =. D'ailleurs, dans l'exemple suivant, de structure semblable, Caroline répète exactement la même erreur. Cependant, il est difficile de savoir si on peut attribuer ces erreurs à une réelle incompréhension, puisque d'autres facteurs semblent avoir influencé la performance de Caroline au cours de cette séance. En effet, elle nous semblait distraite à tel point que la séance a été interrompue au bout de dix minutes et poursuivie le lendemain.

La redistribution des jetons à l'intérieur de la situation concrète continue à poser des problèmes à Caroline lorsque qu'elle doit traiter des équations de structure "a + b = c + d", avec une inconnue. Lorsque Caroline doit résoudre "6 + 2 = 5 + __", où l'inconnue est représentée par un sac transparent dans lequel elle doit ajouter le nombre correct de jetons, elle redistribue les jetons dans la situation concrète de manière erronée. Ainsi, Caroline sépare le sous-ensemble de 6, représenté à sa gauche, en deux sous-ensembles de 5 et 1 et conclut que l'inconnue correspond à 1. "*J'ai triché, parce qu'il y avait ceux-ci (montre 6 jetons), et j'en ai enlevé 1 (sépare les 6 jetons en 5 et 1), alors j'ai mis 1 jeton sur le sac aussi*." Caroline ne tient donc pas compte du deuxième sous-ensemble de 2 jetons représenté à sa gauche, puisqu'elle a transformé l'équation en "6 = 5 + 1".

Cet exemple est intéressant à deux égards. D'une part, il traduit des déficiences au niveau de la compréhension procédurale de l'addition. En effet, l'erreur de Caroline ne résulte pas ici d'une mauvaise compréhension de l'écriture, mais bien de l'application d'une procédure erronée lors de la manipulation du matériel. D'autre part, il montre l'incidence que peuvent avoir des déficiences dans la compréhension procédurale de l'addition et de l'équivalence sur la compréhension d'équations mathématiques. Ainsi, ce sont des procédures mathématiques inadaptées qui induisent Caroline en erreur lorsqu'elle doit compléter l'équation en question.

Par ailleurs, Caroline répète exactement la même erreur lors de la septième séance. Confrontée à l'équation "__ + 4 = 2 + 8", représentée par l'écriture et concrètement sous forme de comparaison, Caroline sépare le sous-ensemble de 8 jetons à sa droite en deux sous-ensembles de 4, sans considérer le sous-ensemble de 2. Son explication traduit d'ailleurs son souci d'utiliser la manipulation des jetons : "*J'ai pensé qu'il y en a 4 ici (montre sous-ensemble de 4 sur la feuille de gauche), alors j'en ai mis aussi 4 ici (sépare l'ensemble de 8 sur la feuille de droite en deux sous-ensembles de 4).*"

Encore une fois, cette erreur n'est pas liée à une compréhension déficiente du signe =. Lorsque nous demandons à Caroline, au début de cette activité, d'expliquer la signification du signe = dans cette situation précise, elle fait référence explicitement à une conception du signe = comme indicateur d'une relation. "*Le signe = signifie que le calcul ici (montre le sous-ensemble de 4 et la boîte en carton sur la feuille de gauche), c'est la même chose que là (montre les deux sous-ensembles de 2 et 8 sur la feuille de droite*". Dans cet exemple, ce sont donc clairement la mauvaise utilisation d'une stratégie de résolution et, par conséquent, des déficits au niveau de la compréhension procédurale qui sont à la base des difficultés que Caroline rencontre pour compléter l'équation "__ + 4 = 2 + 8". Même par la suite, Caroline est incapable de développer une stratégie pertinente qui lui permettrait de compléter correctement cette activité.

Lors de la huitième séance, la même erreur réapparaît dans certaines activités, en fonction toutefois du degré de difficulté de l'équation proposée. Dans des situations, où la stratégie de redistribution des jetons nécessite le déplacement d'un seul jeton, comme c'est le cas dans "2 + 7 = __ + 8", Caroline n'hésite pas. Elle est même tellement certaine de sa réponse qu'elle effectue la redistribution mentalement au lieu de travailler avec le matériel concret. "*Je n'ai pas triché. J'ai juste pensé. J'ai regardé les 7 jetons (à gauche) et ce jeton (un des jetons du sous-ensemble de 2, de manière à en considérer 8 au total), et j'ai pensé qu'il en resterait 1 dans la boîte.*"

Cependant, dès que le nombre de jetons à déplacer augmente, Caroline ignore un des sous-ensembles lors de sa manipulation. Face à l'équation "3 + 4 = __ + 1", elle redistribue mentalement l'ensemble de 4, à gauche, en deux sous-ensembles de 3 et 1, sans considérer l'autre sous-ensemble de 3, et elle insère un 3 à la place réservée à l'inconnue. Ici réapparaît donc une difficulté liée à la compréhension procédurale qui empêche Caroline de compléter ce type d'équation.

Les difficultés à utiliser une stratégie de redistribution du matériel sont également manifestes lorsque nous abordons avec Caroline les activités reliées à la commutativité de l'addition. Lors de la neuvième séance, Caroline doit compléter "4 + 5 = 5 + __", présent sous forme écrite et représenté concrètement comme comparaison. L'inconnue correspond à un sac en plastique transparent dans lequel Caroline doit ajouter le nombre correct de jetons. Elle prétend qu'il faut mettre 5 jetons dans le sac, et son explication laisse entrevoir qu'une mauvaise redistribution du matériel est à l'origine de cette erreur :

> "Parce qu'ici, il y en a 5 (montre sous-ensemble de 5 sur la gauche), et si j'en rajoute 1 ici (transfère 1 jeton de l'ensemble de 5, à gauche, à l'ensemble de 4, à gauche, de manière à obtenir deux ensembles de 5 et 4), il y en a maintenant 5 aussi. Et ici aussi (montre le sac en plastique), il doit y en avoir 5."

Cette erreur est intéressante à deux égards. Elle confirme que, d'une part, Caroline n'a pas compris l'utilisation de la redistribution des jetons, puisqu'elle y a recours dans une situation où cette stratégie n'est pas pertinente et, d'autre part, elle ne se sert pas spontanément de la commutativité de l'addition. D'ailleurs, les réactions dans le contexte des activités suivantes semblent indiquer que la compréhension de cette propriété est largement déficiente chez Caroline.

3.2. Les difficultés liées à une mauvaise compréhension du signe =

Dans la section précédente, nous avons montré que des stratégies inadéquates, qui résultent d'une compréhension procédurale déficiente, empêchent Caroline de compléter certaines activités. Dans les paragraphes suivants, nous allons voir que les difficultés de compréhension du signe = peuvent également amener Caroline à utiliser des stratégies erronées.

Dans certaines situations, nous avons l'impression que, si Caroline est très bien consciente que, lorsqu'on met le signe =, il y a présence des mêmes quantités, elle ne sait pas toujours appliquer cette connaissance à une situation concrète. Cette confusion devient évidente dès que nous demandons à Caroline de compléter des équations, présentées sous forme écrite et représentées comme comparaison. Dans cet exemple, 5 jetons et un sac transparent sont représentés à gauche, et un ensemble de 8 jetons à droite. Caroline doit alors déterminer combien de jetons elle doit mettre dans le sac transparent si on met un signe = entre "5 + __" et "8". La première stratégie de Caroline consiste à séparer l'ensemble de 8 en deux sous-ensembles de 4 et de mettre 4 jetons dans le sac. Cette stratégie erronée, qui s'appuie sur une manipulation des jetons, traduit donc le souci d'obtenir une équivalence. Cependant, au lieu qu'il y ait équivalence entre la réunion de 5 jetons et de ceux dans le sac, d'une part, et les 8 jetons, d'autre part, l'équivalence est appliquée à la séparation de 8 en deux sous-ensembles identiques.

Un peu plus tard la même journée, l'équation "9 = 2 + __" est représentée sous forme écrite et concrètement, l'inconnue correspondant maintenant à une boîte en carton non transparente avec 7 jetons. Dans cet exemple, Caroline fait une erreur similaire à celle que nous venons de décrire. Alors qu'elle est consciente que le signe = indique une équivalence, elle n'a manifestement pas compris la consigne. Lorsque nous lui demandons combien de jetons il doit y avoir dans la boîte si on peut mettre un signe = entre "9" et "2 + __", Caroline prétend qu'il doit y avoir 9 jetons dans la boîte. "*Le signe = signifie que c'est la même chose. […]. C'est la même chose ici (montre ensemble de 9 à gauche) et dans la boîte.*" On retrouve donc son souci de rendre égales des quantités au niveau concret, mais cette stratégie n'est pas appliquée au bon contexte. D'ailleurs, ce n'est qu'avec beaucoup de difficultés et des consignes très explicites que nous réussissons à faire cheminer Caroline dans la compréhension de cette tâche.

La difficulté de déterminer ce qu'il faut rendre égal dans une situation concrète revient lors de la sixième séance, alors que nous demandons à Caroline de compléter "6 + 2 = 5 +__", représenté par son écriture et concrètement sous forme de comparaison. Dans cet exemple, l'inconnue correspond à un sac en plastique transparent dans lequel Caroline doit ajouter le nombre correct de jetons. Dans une des sections précédentes, nous avons déjà décrit que Caroline utilise une stratégie de redistribution non pertinente lors de sa première tentative de résolution. Elle sépare l'ensemble de 6 en deux sous-ensembles de 5 et 1, en ignorant la présence du sous-ensemble de 2. Dans sa deuxième tentative de résolution, Caroline met 2 jetons dans le sac de manière à ce que la réponse corresponde à un des sous-ensembles à gauche. D'ailleurs, lorsque nous tentons de l'aider en lui demandant de déterminer combien il y a de jetons en tout des deux côtés, Caroline nous fait part de ses inquiétudes : "*Je ne sais pas ce que je dois faire. […] Je ne sais pas ce que je dois rendre égal*." Caroline est donc consciente que le signe = indique la présence d'une équivalence, mais elle ne sait pas comment appliquer cette connaissance à la situation concrète.

Un peu plus tard durant la même séance, Caroline répète encore une fois une stratégie erronée semblable. Elle se trouve en face de l'équation "7 + __ = 5 + 5", représentée également sous forme de comparaison, l'inconnue correspondant à une boîte en carton non transparente qui contient 3 jetons. Dans un premier temps, Caroline n'est pas en mesure d'interpréter la signification du signe =. Après que nous lui avons expliqué que la même quantité doit être présente sur la feuille de gauche et la feuille de droite, Caroline propose une stratégie erronée, qui reflète ses difficultés de déterminer ce qu'il faut rendre égal dans la situation concrète. Ainsi, elle affirme que 5 jetons doivent se trouver dans la boîte. Elle attribue donc de nouveau à l'inconnue la même valeur qu'à un des sous-ensembles.

Lorsque, lors de la neuvième et dernière séance d'enseignement, Caroline doit compléter l'équation "3 + 4 + 2 = 6 + __" à partir de l'écriture seulement, c'est également une compréhension déficiente du signe = qui induit Caroline en erreur. Elle prétend, après avoir effectué un calcul à l'aide de ses doigts, que l'inconnue correspond à 9. Elle a donc effectué la somme des trois nombres présents à gauche du signe =, et l'a utilisée telle quelle comme inconnue, en ignorant les nombres à droite du signe =. Encore une fois, on peut supposer que Caroline sait que le signe = indique la présence de quantités identiques, mais qu'elle ne sait pas appliquer convenablement ce savoir.

4. Effort cognitif élevé

Comme nous allons le voir dans cette section à l'aide de deux types d'exemples, l'effort cognitif que Caroline doit fournir pour suivre les activités que nous lui proposons est très élevé. C'est son incapacité de gérer simultanément différents aspects de la compréhension dans deux contextes précis qui nous amène à faire ce constat. Caroline éprouve des difficultés à évaluer simultanément, d'une part, la forme et l'exactitude numérique d'une égalité et, d'autre part, l'écriture et la situation concrète.

4.1. Difficultés à se détacher de la forme d'une égalité

Caroline, nous l'avons souligné, n'arrive pas à gérer simultanément la forme de l'égalité et les valeurs numériques impliquées. Cette problématique apparaît entre autres au cours de la première séance, quand nous demandons à Caroline si on peut mettre un signe = entre "6" et "2 + 3", situation représentée sous forme écrite et concrètement comme comparaison. Initialement, Caroline affirme que c'est possible, en expliquant qu'il y a la même quantité des deux côtés. Cependant, quand nous l'incitons à dénombrer le total de jetons présent à gauche et à droite, Caroline commence à douter de la justesse de sa réponse. "*On ne peut pas mettre le signe =. […] Il faut l'enlever. Je ne sais pas. C'est correct, mais on ne peut pas mettre un signe =*". Caroline accepte donc, d'une part, la forme "a = b + c" de la structure, mais sait que les valeurs numériques impliquées ne sont pas correctes. Cependant, ces informations ne lui suffisent pas pour répondre, puisqu'elle ne sait pas laquelle des deux elle doit privilégier.

Lorsque Caroline doit décider si on peut mettre un signe = entre "8" et "3 + 4" un peu plus loin durant la première séance, elle admet que c'est possible en basant de nouveau sa justification surtout sur la forme de l'énoncé.

> "On peut le mettre, parce que, quand tu fais 3 + 4, c'est la même chose que 8, même si le 3 + 4 est ici (en arrière du signe =) et le 8 ici (avant le signe =), ça ne dérange pas. Si je le fais comme ça (montre 4 + 3 = 8) ou comme ça (montre 8 = 3 + 4), égale 8, c'est la même chose que 8."

Les propos de Caroline traduisent ici surtout sa capacité d'accepter des structures de type "a = b + c". En effet, son argumentation porte davantage sur la forme que sur les valeurs numériques impliquées. Quant aux causes de ce phénomène, il est peu probable qu'il soit dû à une simple erreur de calcul. Ainsi, la même erreur apparaît dans un autre exemple de même structure durant la première séance.

Ce n'est que lors de la deuxième séance, lorsque Caroline doit traiter de nouveau une fausse égalité de même structure qu'elle pense spontanément à vérifier les valeurs numériques impliquées pour en venir à la conclusion qu'on ne peut pas mettre un signe = entre "10" et "6 + 3".

Cependant, lorsque nous présentons à Caroline des fausses égalités de structure "a + b __ c + d", celle-ci base de nouveau son jugement exclusivement sur la forme de l'égalité. Lors de la cinquième séance, Caroline affirme qu'on peut mettre un signe = entre "3 + 3" et "2 + 5", situation présentée sous forme écrite et représentée comme comparaison. "*On peut mettre le signe =, parce que c'est la même chose.*" La justification de Caroline dans ce contexte peut étonner, puisque manifestement, elle n'a pas vérifié ce constat. Cependant, dès que nous l'amenons à justifier sa réponse avec le matériel concret, Caroline se rend compte de son erreur et apporte les correctifs nécessaires.

D'ailleurs, la même erreur est répétée quelques minutes plus tard, face à une activité de structure "1 + 7 __ 4 + 3". Une nouvelle fois, la justification porte sur les valeurs numériques et la justesse des propos n'a manifestement pas été vérifiée, puisque Caroline donne sa réponse immédiatement après la mise en place de la situation. "*On peut mettre le signe =, parce que c'est la même chose, ce calcul-là.*"

Ce n'est que lorsque nous lui présentons une dernière fausse égalité, de structure "3 + 2 __ 2 + 4" à partir de l'écriture seulement, que Caroline se rend compte qu'on ne peut pas mettre le signe =. "*On ne peut pas le mettre, parce que ce n'est pas juste.*"

On peut donc constater que, parmi les sept fausses égalités que Caroline avait à évaluer tout au long de la séquence d'enseignement, elle n'a réussi à déterminer que pour deux d'entre elles qu'elles ne sont pas correctes. La fréquence de l'erreur de Caroline élimine par conséquent l'hypothèse qu'une simple erreur de calcul serait à l'origine de ces difficultés. Restent alors deux aspects qui peuvent expliquer le phénomène décrit. D'une part, il est possible qu'un effet d'enseignement ait influencé Caroline dans ses réponses : à chaque fois, les inéquivalences étaient précédées de plusieurs exemples qui permettaient effectivement la mise en place du signe =. Il est donc fort possible que Caroline ait simplement répété les réponses qui lui ont permis de résoudre les activités précédentes. D'autre part cependant, l'hypothèse que Caroline doive fournir un effort cognitif trop important reste plausible. La fréquence des erreurs, et surtout la rapidité avec laquelle Caroline donne parfois ses réponses pourraient être un indice que cette élève se base uniquement sur la forme de l'égalité, sans vérifier les valeurs numériques.

4.2. Difficile gestion simultanée de l'écrit et de la situation concrète

Les activités que nous venons de décrire étaient séparées en deux parties. Dans une première partie, Caroline doit décider s'il est possible de mettre en place un signe =, en se basant sur les valeurs numériques. Nous avons vu qu'elle éprouve des difficultés à considérer simultanément la forme de l'énoncé et les valeurs numériques. Dans une deuxième partie de la tâche, il s'agit pour Caroline de transformer la situation en une équivalence, tant au niveau concret que de l'écriture. Comme nous allons le voir dans cette section, Caroline a encore des difficultés à gérer simultanément ces deux aspects distincts.

Dès le premier exemple de ce type, Caroline est en face d'un ensemble de 6 jetons à gauche et de deux sous-ensembles de 2 et 3 jetons à droite. Lorsque nous lui demandons de transformer la situation de façon à ce qu'on puisse mettre le signe =, Caroline modifie la situation concrète en rajoutant un jeton au sous-ensemble de 3, mais accepte encore l'écriture "6 = 2 + 3." Ce n'est qu'après intervention de notre part qu'elle se rend compte que l'égalité doit également être modifiée pour être correcte.

Dans d'autres activités aussi, Caroline change seulement la situation concrète, mais ne tient pas compte de l'écriture. Dans une de ces situations, elle doit décider si on peut mettre le signe = entre "9" et "1 + 7", représenté sous forme écrite et concrètement comme comparaison. Lorsque nous lui demandons de modifier cette situation de manière à ce qu'on puisse mettre le signe =, celle-ci rajoute un jeton au sous-ensemble de 7 dans la situation concrète, mais laisse telle quelle l'écriture. "*9 = 1 + 7, c'est correct*". Ce n'est qu'après intervention de notre part que Caroline se rend compte que l'écriture doit également être modifiée.

Les difficultés de Caroline persistent dans toutes les autres activités, pour lesquelles nous lui demandons de transformer une fausse égalité en une égalité, qu'elles soient de structure "a = b + c" ou "a + b = c + d". Dans toutes ces situations, Caroline modifie la situation concrète, mais n'en fait pas autant pour l'écriture. Cependant, vers la fin de la séquence d'enseignement, elle se rend compte de plus en plus vite de son erreur. En effet, dans une des dernières situations de ce genre, le simple fait que nous lui demandons de lire l'égalité la rend attentive au fait qu'elle doit également changer l'écriture.

5. Difficulté à établir un lien entre la situation concrète et l'écriture

Dans les sections précédentes, nous avons vu que Caroline a des difficultés à plusieurs niveaux, dont certaines sont liées à son incapacité de relier une égalité ou une équation à une représentation concrète. Les paragraphes suivants vont nous montrer que Caroline est néanmoins en mesure d'établir ce lien dans certaines situations, alors qu'il s'agit de traiter des représentations sous forme de comparaison de structure "a + b = c" ou "a = b + c", dans la mesure toutefois où les situations n'impliquent pas des relations d'inclusion ou des structures trop complexes.

5.1. Relative facilité avec des structures moins complexes

Pour des situations moins complexes, de structure "a = b + c" ou "a + b = c", les réactions de Caroline laissent conclure qu'elle a, au moins en partie, réussi à établir un lien cohérent entre une égalité et sa représentation concrète. Ce lien semble être plus facile à établir lorsque l'écriture est représentée sous forme de comparaison. Dans ce cas, Caroline est, dès la première séance, en mesure de montrer qu'elle a compris que la même quantité doit être présente des deux côtés, tant au niveau de l'écriture que de la représentation concrète.

Dans un des premiers exemples de notre séquence d'enseignement, Caroline doit évaluer l'égalité "9 = 4 + 5". Rappelons que, dans cette situation, c'est la première fois qu'elle laisse entrevoir une compréhension du signe = comme indicateur d'une relation. "*On peut mettre le signe = quand on calcule et quand on fait d'autres choses aussi, mais on peut uniquement le mettre quand il y a la même chose.*" Caroline a donc compris que, dans cette situation, la même quantité est présente des deux côtés du signe =. En même temps, elle réussit d'une certaine façon à relier cette écriture à la situation concrète : lorsque nous lui demandons de montrer les jetons que les différents nombres représentent, elle est en mesure de le faire correctement, en tenant compte d'un contexte de comparaison. Ceci peut être un indice que, dans cette situation, elle est consciente qu'il y a également présence de la même quantité des deux côtés dans la situation concrète.

Certains signes laissent par ailleurs entrevoir que Caroline réussit à établir un lien entre la situation concrète et l'écriture de situations moins complexes lorsque celles-ci sont représentées sous forme d'inclusion. Lors de la première séance, nous demandons à Caroline d'évaluer si on peut mettre un signe = entre "3 + 6" et "9", deux expressions présentes sous forme écrite seulement. Sa réponse, qui se base sur l'équivalence des deux termes, fait preuve d'une compréhension du signe = comme indicateur d'une relation. "*On peut mettre le signe =, parce que 3 + 6, c'est 9.*" Par la suite, Caroline choisit un contexte d'inclusion pour représenter concrètement cette égalité.

Ce choix peut cependant paraître étonnant, puisque, dans toutes les activités précédentes, ce sont des représentations sous forme de comparaison qui ont été présentées à Caroline. Néanmoins, celle-ci réussit à déterminer correctement quels sont les jetons qui correspondent aux différents nombres. Dans ce cadre, elle désigne la réunion des deux sous-ensembles de 3 et 6 jetons comme l'ensemble qui correspond à 9.

Reste à mentionner que, dans plusieurs autres exemples de ce type, Caroline montre la même réaction. Son aisance dans ce type de situations n'est cependant pas étonnant si on sait que les situations d'addition qui lui ont été présentées avant la séquence d'enseignement en classe correspondaient la plupart du temps à des situations inclusives, dans lesquels il s'agissait de déterminer le total des jetons présents.

5.2. Difficultés importantes lors du traitement de situations plus complexes

Des difficultés importantes à établir un lien entre l'écriture d'une égalité et une représentation concrète apparaissent dès l'introduction de situations plus complexes. Au cours de la troisième séance, lorsque nous demandons pour la première fois à Caroline de compléter des équations, d'importantes difficultés se manifestent. Lors de cette séance, Caroline doit compléter l'équation "9 = __ + 2", présentée sous forme écrite et représentée sous forme de comparaison. L'inconnue correspond dans ce cadre à un sac en plastique transparent, dans lequel Caroline doit ajouter le nombre correct de jetons.

En résolvant cette activité, Caroline réussit assez facilement à déterminer qu'il faut mettre 7 jetons dans le sac. Cependant, au lieu de prendre 7 jetons parmi ceux qui ne sont pas encore utilisés, Caroline en enlève 7 de l'ensemble de 9, à sa gauche, et les transfère dans le sac en plastique, à sa droite. Elle a donc réussi à déterminer l'inconnue dans l'écriture, mais au plan concret, elle se retrouve avec 2 jetons à sa gauche, et deux sous-ensembles de 2 et 7 jetons à sa droite, situation qui ne correspond plus à une équivalence.

Les difficultés de Caroline se manifestent également lorsque nous lui demandons dans différentes situations à quels objets correspondent les nombres dans une égalité. Face à "1 + 6 = 7", représenté sous forme de comparaison et les 6 jetons ayant été mis dans le sac en plastique transparent par Caroline, celle-ci ne réussit pas à établir un lien cohérent. Lorsque nous lui demandons de nous montrer à quels objets correspondent les différents nombres de l'égalité, elle sépare les 7 jetons à sa droite en deux sous-ensembles de 1 et 6 et fait uniquement référence aux objets à sa droite. Caroline ignore donc complètement les objets à sa gauche, et, au niveau concret, transforme la situation en inclusion.

Une erreur analogue survient lors de la quatrième séance, au moment où Caroline vient de résoudre "__ + 2 = 10", présent sous forme écrite et représenté par une comparaison, l'inconnue correspondant à une boîte en carton. Incitée à montrer les objets qui correspondent aux différents nombres, Caroline sépare l'ensemble de 10 à sa droite en deux sous-ensembles de 2 et 8. Par la suite, elle désigne un ensemble de 8, à sa droite, ainsi que deux ensembles de 2 et de 10 à sa gauche. Elle n'est donc cohérente, ni avec une représentation sous forme de comparaison, ni avec une inclusion, ce qui peut être un autre indice que Caroline éprouve des difficultés à relier une écriture à une situation concrète.

Alors que, dans l'exemple précédent, Caroline arrive à traiter la situation écrite, mais a de la difficulté à en déduire une représentation concrète, l'inverse est le cas lors de la cinquième séance. Dans une des activités en question, Caroline doit évaluer l'égalité "3 + 1 + 2 = 4 + 2, représentée sous forme écrite uniquement. Alors qu'elle n'a pas de difficulté dans cette situation à représenter concrètement l'égalité sous forme de comparaison, la stratégie de résolution adoptée par Caroline traduit sa difficulté à relier cette représentation à l'écriture. En effet, après avoir affirmé qu'on peut mettre le signe =, elle essaie d'additionner tous les nombres présents dans l'égalité. Ici, c'est donc la stratégie au niveau de l'écriture qui est déficiente.

Finalement, un dernier type de situations témoigne des difficultés de Caroline à relier une situation concrète à son écriture. Lorsque nous abordons avec Caroline les structures "a + b = c + d", représentées sous forme d'inclusion, elle se heurte à des obstacles importants, lorsqu'elle doit montrer à quels objets correspondent les différents nombres. Citons à titre d'exemple le travail de Caroline sur l'égalité "3 + 4 = 2 + 5", présente sous forme écrite et représentée par une inclusion. Caroline réussit rapidement à déterminer que la mise en place du signe = est appropriée en faisant référence au total des deux côtés du signe =, mais éprouve des difficultés à établir un lien avec la situation concrète. Ainsi, lorsque nous lui demandons de montrer les jetons qui correspondent aux différents nombres, c'est un aspect spécifique des situations d'inclusion qui crée une certaine confusion chez Caroline. Lors de la manipulation concrète, deux sous-ensembles de 3 et 4 étaient représentés au début. Par la suite, un jeton de l'ensemble de 3 a été transféré dans l'ensemble de 4, de manière à obtenir deux sous-ensembles de 2 et 5. Cependant, à ce moment, les ensembles de 3 et 4 ne sont plus visibles, et il faut faire l'opération inverse de la transformation pour retrouver la situation initiale. C'est justement cet aspect qui pose problème à Caroline, puisqu'elle ne réussit pas à montrer de manière cohérente à quels objets correspondent les différents nombres. D'ailleurs, cette même difficulté se répète dans deux autres exemples de même structure qui ont suivi cette activité.

6. Apprentissages lents et précédés par plusieurs erreurs

Malgré de nombreuses difficultés, Caroline a quand même réussi à réaliser un certain nombre d'apprentissages. Comme nous allons le voir, ces apprentissages se manifestent généralement après plusieurs erreurs et la répétition de quelques exemples de même structure. Afin de décrire ce phénomène, nous avons choisi, en guise d'exemple, les activités dans le cadre desquelles Caroline doit compléter des équations de structure "a + b = c" ou "a = b + c", l'inconnue étant placée à des endroits différents et l'écriture étant accompagnée d'une représentation concrète.

Vers la fin de ces activités, Caroline est en mesure de compléter ces équations sans difficultés majeures. Face à l'équation "__ + 3 = 5", présente sous forme écrite et représentée par une comparaison dans laquelle l'inconnue correspond à une boîte en carton non transparente, elle se sert de ses doigts pour trouver la solution. Elle montre 5 doigts, en enlève 3 et détermine qu'il doit y avoir 2 jetons dans la boîte.

Si Caroline semble à l'aise dans cette situation, tel n'a pas été le cas lors de toutes les activités de ce type. Comme nous l'avons déjà décrit dans des sections antérieures, la progression de Caroline est parsemée de plusieurs erreurs. Parmi celles-ci, on compte le recours à des stratégies erronées, le retour vers une conception du signe = comme opérateur et un lien insuffisant entre la représentation concrète et l'écriture. Ce n'est qu'après plusieurs interventions de notre part que Caroline réussit à mener à terme les premières activités de ce type.

Ses difficultés ont été tellement importantes que nous avons même décidé d'insérer des activités supplémentaires, plus faciles, dans notre séquence afin d'aider Caroline. À un moment donné, nous avons interrompu une séance, parce que nous pensions que la charge cognitive était trop élevée pour Caroline, en manque de concentration. Si Caroline a donc réussi à réaliser des apprentissages, ceux-ci ont été plutôt laborieux et ont nécessité de nombreuses interventions, parfois très directives, de notre part.

PROGRÈS DU PRÉTEST AU POST-TEST

Les résultats du post-test démontrent que Caroline a quand même réalisé certains apprentissages lors de la séquence d'enseignement. Cependant, le début de l'entrevue montre à quel point ces apprentissages sont fragiles et que leur rétention dans le temps est faible. Nous allons, dans un premier temps, décrire que la compréhension formelle reste incomplète et qu'elle est caractérisée par de nombreux retours vers une conception du signe = comme opérateur. Une deuxième partie fera état, par la suite, des difficultés importantes qui persistent au niveau de la compréhension procédurale.

1. Compréhension formelle incomplète

Au début du post-test, alors que Caroline doit évaluer différentes égalités, celle-ci commet presque les mêmes erreurs que lors du prétest. Même si elle affirme que le signe = indique "*qu'il y a la même chose des deux côtés*", elle a de la difficulté à mettre en pratique cette connaissance : après avoir accepté "6 + 3 = 9", elle réfute "8 = 4 + 4" en se basant sur la forme de l'égalité : "*C'est faux, parce que c'est tourné dans le mauvais sens*." Caroline attribue donc clairement une signification d'opérateur au signe =, et ce même si elle est toujours persuadée que le signe = indique qu'il y a la même quantité des deux côtés. "*C'est faux parce qu'il n'y a pas la même chose.*"

L'activité suivante consistant en l'évaluation de "2 + 4 = 7", Caroline affirme immédiatement que c'est correct en se basant sur la forme de l'égalité. "*C'est juste parce que ce n'est pas à l'envers*". Elle répète donc ici une des erreurs qui est apparue à plusieurs reprises lors du prétest et de la séquence d'enseignement.

Le retour vers une ancienne erreur est également évident lorsque nous demandons à Caroline d'évaluer l'exactitude de "6 = 6". Elle réfute cette expression, en se basant sur sa forme qui ne correspond pas à une structure "a + b = c" : "*C'est faux, parce qu'il n'y a pas de plus. […] 6, égale 6, on ne comprend rien.*" Cette réponse peut paraître d'autant plus étonnante si on sait que Caroline affirme immédiatement après que le signe = est un indicateur d'une relation d'équivalence. "*On met le signe =, quand ici (montre à gauche du signe =), c'est la même quantité qu'ici* *(montre à droite du signe =)*". Il est donc évident qu'à ce moment, Caroline connaît la définition du signe =, mais qu'elle est incapable de l'appliquer.

La situation change cependant, dès que Caroline est priée d'évaluer "4 + 2 = 6 + 1". Elle affirme d'abord qu'on ne peut pas mettre le signe =, en se basant encore une fois sur la structure de l'énoncé : "*On ne peut pas mettre le signe =, parce qu'il y a deux calculs*." Cependant, lorsque nous lui demandons d'élaborer davantage les raisons de son refus, Caroline semble se souvenir que ce n'est pas aussi simple. Sa deuxième justification se base alors sur les quantités présentes des deux côtés du signe =. "*Ce n'est pas la même chose, parce que dans le calcul, c'est 4 + 2, et 6 + 1, c'est 7.*" D'ailleurs, ce changement d'argumentation est hautement significatif, puisque, par la suite, Caroline détermine le total présent des deux côtés pour évaluer "2 + 5 = 3 + 4. Il y a donc eu un effet important d'apprentissage au cours de la passation du post-test.

Cet effet nous a surpris à tel point que nous avons décidé de représenter à Caroline les égalités qu'elle avait mal évaluées auparavant. Lors de la deuxième tentative, l'attitude de Caroline change complètement, et elle arrive maintenant à évaluer correctement ces égalités en se basant sur la présence de la même quantité des deux côtés.

Si Caroline semble avoir réalisé des apprentissages en ce qui concerne l'évaluation de différentes égalités, des difficultés importantes apparaissent de nouveau lorsqu'il s'agit de compléter des équations. Dans la deuxième activité de ce type, Caroline doit compléter "6 + __ = 10", à partir de l'écriture uniquement. Pour ce faire, elle fait référence à une activité qui a probablement été traitée en classe récemment. En effet, Caroline connaît par cœur le complément de 6 pour obtenir 10, qui est 4.

Le problème est que, après s'être basée avec succès sur cette stratégie, elle l'utilise également dans le cadre des activités subséquentes, alors qu'elle n'y est pas pertinente. Ainsi, en face de "9 = __ + 2", Caroline insère 8, qui est le complément de 2. La stratégie est similaire, lorsqu'elle doit traiter "7 + 1 = __ + 2". Face à cette situation, Caroline cherche encore une fois le complément de 2 et insère 8 à la place de l'inconnue.

Une autre difficulté s'ajoute à l'emploi de ces stratégies erronées puisque, Caroline semble de nouveau se référer à une conception du signe = comme opérateur. Après avoir transformé "9 = __ + 2" en "9 = 8 + 2", Caroline affirme que cette égalité est tournée dans le mauvais sens. "*Le calcul est correct, mais c'est à l'envers. Il faudrait que ce soit comme ici (montre une égalité de structure "a + b = c")*"

2. Difficultés importantes en ce qui a trait à la compréhension procédurale

Chez Caroline, les difficultés importantes que nous avions observées lors du prétest au niveau de la compréhension procédurale n'ont pas disparu lors du post-test. Comme nous allons le voir dans cette section, le taux de réussite de Caroline dans les activités qui concernent la compréhension procédurale au post-test est très faible.

L'activité la plus difficile de cette partie du post-test amène Caroline à déterminer l'inconnue dans la représentation concrète sous forme de comparaison de l'équation"1 + __ = 3 + 4". Au niveau concret, l'inconnue est représentée par une boîte en carton non transparente. Cependant, Caroline ne réussit pas à trouver l'inconnue. Elle essaie uniquement de deviner la réponse, sans que nous soyons en mesure de déterminer une stratégie cohérente qui serait à la base de ces essais.

L'utilisation de stratégies erronées induit également Caroline en erreur dans les activités subséquentes. Face à une représentation concrète sous forme d'inclusion de "4 + __ = 9", où l'inconnue correspond à une boîte en carton contenant 5 jetons, Caroline tente une nouvelle fois de déterminer le complément de 4 pour obtenir une somme de 10. Par ailleurs, la présence d'un contexte d'inclusion semble créer une confusion additionnelle, puisque Caroline s'étonne de l'absence d'un ensemble de référence de 9 éléments : "*Et ici, il n'y a rien ? (montre à droite des deux sous-ensembles de 4 et 5)*".

Dans l'activité suivante, c'est la stratégie de redistribution de jetons qui induit Caroline en erreur. Celle-ci se trouve en face de 2 jetons à sa gauche et de 10 jetons à sa droite et doit déterminer combien il faut ajouter d'éléments à l'ensemble de gauche pour qu'il y ait la même quantité des deux côtés. Après avoir demandé le droit de "tricher", Caroline met deux jetons sur la feuille de gauche et en rajoute 8, de manière à se retrouver avec 10 jetons dans le sac et une structure "2 + 10 = 10". L'analyse de cette séquence montre que Caroline sait intuitivement que la séparation de 10 jetons en deux ensembles de 2 et 8 peut l'aider dans la résolution de l'activité. Cependant, cette stratégie est mal appliquée et n'aboutit pas à une réponse correcte.

L'activité suivante échoue également. Caroline est confrontée à deux ensembles de 6 jetons à gauche et 2 jetons à droite, et doit déterminer combien de jetons elle doit ajouter à l'ensemble de 2 pour qu'on retrouve la même quantité des deux côtés. Au départ, Caroline nous demande plusieurs fois à quel endroit elle doit retrouver les mêmes quantités, ce qui montre qu'elle a des difficultés majeures avec la consigne. D'ailleurs, elle ne réussira pas à résoudre cette activité. Compte tenu de la simplicité apparente de ses stratégies, nous nous demandons cependant si la contre-performance est due, en partie au moins, à la fatigue de Caroline.

Finalement, Caroline ne réussit qu'à résoudre une seule, en l'occurrence la plus facile des activités qui visaient à évaluer sa compréhension procédurale. On peut donc constater que les progrès que Caroline a réalisés tout au long de la séquence d'apprentissage sont très fragiles et que la rétention est extrêmement faible. S'il n'y avait pas eu un effet d'apprentissage dans le cadre des activités visant à évaluer la compréhension formelle, les résultats de Caroline au post-test n'auraient guère été plus élevés qu'au prétest.

LE CAS DE MÉLISSA

Cette section, qui vise à décrire l'évolution de Mélissa tout au long de la séquence, fera état d'importants progrès de cette élève. Mélissa, évaluée comme élève « moyenne » lors du prétest, a réalisé de nombreux apprentissages.

Dans une première partie, nous allons voir que Mélissa considère le signe = comme un opérateur lors du prétest. Une deuxième partie montrera que les progrès réalisés par Mélissa sont substantiels. Ce constat sera confirmé lors de la description des résultats du post-test, en troisième partie : la compréhension de Mélissa est plus stable que celle de tous les élèves observés dans notre recherche.

CONCEPTION COMME OPÉRATEUR LORS DU PRÉTEST

Lors du prétest, Mélissa n'est pas certaine de la signification qu'elle doit attribuer au signe =. "*Je ne sais pas ce que ça signifie.*" À l'aide de ses réponses, nous pouvons cependant déterminer qu'elle utilise ce signe comme un opérateur dans la plupart des situations que nous lui présentons.

L'incertitude de Mélissa se manifeste dès la première activité, alors qu'elle doit évaluer "4 + 5 = 9". Après avoir accepté cette égalité comme étant juste, Mélissa explique la signification du signe = en se rapportant à deux cadres de référence différents. Elle affirme d'une part que "*quand c'est égal, c'est aussi la même chose*", et d'autre part, qu'on met le signe = "*quand on met encore une autre lettre (chiffre) après*". Pour Mélissa, le signe = est synonyme à la fois d'un indicateur de relation et d'un instrument pour séparer les chiffres.

D'ailleurs, il semble que c'est l'absence d'enseignement explicite qui ait contribué aux difficultés de compréhension de Mélissa. Lorsque nous lui demandons ce que signifie ce signe, sa réponse laisse croire que ce signe n'a pas encore été traité en classe. "*Je ne le sais pas. On ne l'a pas encore appris.*"

Par la suite et dès la deuxième activité, Mélissa, devant évaluer "7 = 3 + 4", semble comprendre le signe = comme un opérateur. "*Je pense que ce n'est pas correct, parce que tantôt (dans l'égalité précédente), il y avait un + ici (en deuxième place), et* *maintenant, c'est le = qui est ici (en deuxième place).*" Dans cet exemple, c'est donc la forme de l'égalité, qui ne correspond pas à une structure "a + b = c", qui explique le refus de Mélissa.

La forme de l'écriture joue également un rôle important lorsque Mélissa doit évaluer "3 + 5 = 7". Sa première réaction est d'accepter cette expression, en se basant sur la structure *: "C'est correct, parce que le = vient ici (en quatrième position).*" Ce n'est que lorsque nous demandons à Mélissa de lire l'égalité qu'elle se rend compte de son erreur pour baser ensuite son jugement sur les valeurs numériques.

L'égalité "3 + 4 = 1 + 6" est également réfutée. L'argumentation de Mélissa laisse maintenant clairement conclure qu'elle conçoit le signe = comme un opérateur. "*Ce n'est pas correct, parce qu'il y a quelque chose de faux ici. C'est parce que 3 + 4, ça donne 7, et pas 1.*" La transformation de l'égalité en une structure "a + b = c" nous permet dans ce cadre de déduire que Mélissa est d'avis que le signe = est suivi d'une réponse à une opération arithmétique qui le précède.

Cette hypothèse est confirmée lorsque Mélissa doit compléter l'équation "7 = __ + 5". Elle réussit à trouver l'inconnue, probablement parce qu'elle connaît par cœur le calcul qui est à sa base. Par contre, lorsqu'elle doit lire l'égalité, elle procède dans le sens inverse, de manière à la transformer en une structure "a + b = c". Elle est une fois de plus cohérente avec une conception du signe = comme opérateur.

Le souci de transformer les égalités en une structure "a + b = c" se retrouve d'ailleurs également lorsque Mélissa doit compléter "6 + 2 = __ + 3". En effet, l'inconnue qu'elle propose est 8, et elle se base sur un raisonnement qui laisse conclure à une conception du signe = comme opérateur : "*C'est 8, parce que 6 + 2, c'est 8.*"

Dans le cadre des activités qui concernent la compréhension formelle, il n'arrive qu'une seule fois que Mélissa n'est pas certaine que le signe = est un opérateur. C'est lors de l'évaluation de "5 = 5" que ses doutes se manifestent : "*Je ne sais pas très bien. Je pense que celle-ci (5 = 5) est un peu mieux. […] Mais ne serait-ce pas mieux, 5 + 5 ?*" Sans pouvoir l'articuler clairement, Mélissa se doute que le signe =

pourrait signifier autre chose dans cette situation. C'est probablement parce qu'elle pense que le signe = peut indiquer une relation d'équivalence que Mélissa évalue cette égalité comme "un peu mieux". Cependant, cette conception n'est pas ancrée fortement, puisque Mélissa l'abandonne rapidement.

Lorsqu'il s'agit d'évaluer la compréhension abstraite et procédurale de Mélissa, aucune difficulté n'est à signaler, à part quelques erreurs de dénombrement. La diversité des stratégies auxquelles Mélissa a recours dans les activités qui touchent la compréhension procédurale laisse même suggérer qu'elle est à l'aise dans la résolution de ces activités. En effet, selon la situation, elle utilise un double dénombrement, une redistribution des jetons ou encore une soustraction.

Ainsi, la première tâche de ce type amène Mélissa à recourir à un double dénombrement. Dans ce cadre, elle doit déterminer le nombre de jetons dans une boîte en carton non transparente qui se retrouve dans une représentation concrète sous forme d'inclusion et de structure "5 + __ = 8". C'est par une stratégique additive, impliquant un double dénombrement, que Mélissa réussit à déterminer le nombre de jetons : "*Il y en a 3, parce que j'en ai 5, et + 3, ça donne 8. 6, 7, et 8*."

Dans l'activité suivante, alors qu'elle doit déterminer le nombre de jetons dans une représentation sous forme de comparaison de "4 + __ = 10", c'est par une soustraction qu'elle réussit à déterminer le nombre d'éléments dans la boîte. Elle sort d'abord 3 et, après s'être rendue compte de son erreur, 4 jetons de l'ensemble de 10 et estime qu'il doit y avoir 6 jetons dans la boîte.

Mélissa utilise une forme de la redistribution des jetons lorsqu'elle doit spécifier combien de jetons elle doit ajouter à un ensemble de 4, représenté à droite, pour qu'il y ait la même quantité que dans un ensemble de 7, à gauche. Elle sépare mentalement l'ensemble de 7 en deux sous-ensembles de 3 et 4 éléments et ajoute 3 jetons à l'ensemble de 4 jetons. "*J'ai pensé, j'en avais 4, j'en sors 3 ici (dans l'ensemble de référence), et je suis allée chercher le reste.*"

Si les résultats de Mélissa lors du prétest sont plutôt encourageants, l'enseignante de la classe nous a fait part que celle-ci éprouvait quand même certaines difficultés à l'école et ce tant en mathématiques qu'en lecture et en écriture.

En général, elle se classerait légèrement en dessous de la moyenne de la classe. Les résultats du prétest, ainsi que les commentaires de l'enseignante nous ont donc amené à classifier Mélissa comme une élève moyenne.

PROGRESSION DANS LA COMPRÉHENSION DU SIGNE = PENDANT LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Comme nous allons le voir dans cette section, Mélissa progresse de manière globalement positive vers une compréhension plus adéquate du signe =. Elle réagit bien à l'introduction d'une nouvelle signification du signe =. Son erreur principale au cours de la séquence d'enseignement, à savoir le retour vers une conception du signe = comme opérateur, se limite à quelques rares exceptions dans un type bien délimité de situations. Plusieurs facteurs ont pu contribuer à la bonne performance de Mélissa, notamment la diversité de stratégies qu'elle utilise de manière cohérente et efficace, ainsi que l'aisance avec laquelle elle établit un lien entre une écriture et la situation concrète qu'elle représente.

1. Réactions à l'explication du signe =

L'évolution de la compréhension du signe = débute dès la première séance d'enseignement. Lors de la première tâche, avant l'explication du signe =, Mélissa entretient encore clairement une conception de ce signe comme opérateur. "*À l'école, on travaille avec le = pour dire combien ça fait.*" Après la transformation de la situation concrète de structure "5 + 3 = 8" en "8 = 5 + 3", Mélissa accepte la mise en place du signe =, à condition de faire une lecture de droite à gauche. "*Il faut mettre le 5 + 3, et après, le 8 (derrière le signe =). Alors si on le retourne, on va voir si c'est correct. Comme on le voit maintenant (8 = 5 + 3), ce n'est pas correct.*" En mettant en place le signe =, Mélissa ne se base donc pas encore sur une meilleure compréhension, mais essaie plutôt de ramener l'égalité à une structure "a + b = c".

Cette compréhension évolue dès que nous expliquons la signification du signe =. Initialement, Mélissa se montre très étonnée : elle met en doute l'explication que nous lui fournissons : "*Je pense que ce n'est pas comme ça. Si on a d'abord 8 ici… On n'a pas encore appris ce que veut dire 'égal', mais je pense que ça veut dire… quoi donc ?*"

Une conception du signe = comme opérateur est donc assez fortement ancrée chez Mélissa pour qu'elle mette en doute l'introduction d'une nouvelle signification. Par la suite, Mélissa accepte cependant cette approche, en s'appuyant sur la présence du même total des deux côtés.

Cette conception est cependant encore fragile, puisque, dans l'exemple suivant, Mélissa accepte la mise en place du signe = dans "9 = 4 + 5", tout en doutant de la justesse de cette écriture. Ainsi, il importe pour Mélissa de réunir les jetons des deux côtés en deux ensembles identiques de 9 éléments. "*On peut écrire 9 = 4 + 5, mais si les jetons ne sont pas réunis (les deux sous-ensembles de 4 et 5 réunis en un ensemble de 9), on ne peut pas le faire.*" La forme même de l'égalité semble aussi inquiéter Mélissa. "*On peut le faire, mais ce n'est pas si bon. C'est mieux de ne pas le faire parce que si on a 4 et 5, on veut dire un + ou un =, c'est mieux de chercher où est le 9 quand on les met ensemble.*" Si les propos de Mélissa sont difficiles à interpréter ici, il n'en reste pas moins que celle-ci semble encore douter de la possibilité de maintenir une structure "a = b + c".

2. Retour vers l'ancienne conception du signe =

Mélissa retourne rarement vers une conception du signe = comme opérateur. Certains types de situations l'induisent néanmoins en erreur. Dans une première partie de cette section, nous allons décrire en quoi consiste cette erreur. Une deuxième partie servira par la suite à délimiter les caractéristiques du retour vers une conception du signe = comme opérateur.

2.1. Deux formes d'erreur différentes

Le retour vers une conception du signe = comme opérateur se manifeste essentiellement sous deux formes différentes. D'une part, Mélissa se sert parfois de la lecture à l'envers pour travailler des égalités de structure "a = b + c". D'autre part, il arrive qu'elle transforme des égalités de structure "a + b = c + d" en "a + b = c".

2.1.1. Lecture à l'envers de certaines égalités

Si Mélissa a parfois tendance à lire de droite à gauche certaines égalités de structure "a = b + c", cette approche reste cependant assez rare tout au long de la séquence d'enseignement. Elle nous fait part une première fois de son intention de lire de droite à gauche au cours de la deuxième séance, lorsqu'elle est amenée à lire "7 = 3 + 4". "*Je n'aime pas ça, lire comme ça (de gauche à droite), et si on le retournait, on pourrait mieux le lire.*"

La lecture à l'envers réapparaît brièvement lors de la troisième séance, alors que Mélissa doit lire l'égalité "8 = 4 + 4". Elle commence à lire de droite à gauche, mais après avoir prononcé le premier chiffre, elle se ravise. Cependant, l'erreur persiste lorsque nous lui demandons de représenter concrètement cette situation. Pour ce faire, elle choisit une situation de comparaison, avec deux ensembles de 4 à gauche et un ensemble de 8 à droite. Cette représentation correspond donc à l'inverse de l'écriture. D'ailleurs, cette situation n'est pas unique, puisque Mélissa répète la même stratégie au cours de la quatrième séance, lorsqu'elle doit représenter une autre égalité de structure semblable.

Finalement, lorsque nous demandons à Mélissa de résoudre l'équation "9 = __ + 2", celle-ci a de nouveau des doutes sur l'exactitude de telles structures. "*Je ne sais pas. C'est un peu bizarre. C'est presque la même chose, mais c'est à l'envers.*" D'ailleurs, c'est en partie à cause de cette conception d'égalité à l'envers que Mélissa a des difficultés à comprendre la consigne donnée dans cette activité.

2.1.2. Transformation en une structure "a + b = c"

Comme nous l'avons décrit antérieurement, la transformation d'une égalité non conventionnelle en une structure "a + b = c" permet à l'enfant de retrouver une structure de l'égalité qui lui est plus familière et qui peut être cohérente avec une conception du signe = comme opérateur. Chez Mélissa, cette stratégie se manifeste, assez rarement, il est vrai, à la fois dans des structures de type "a = b + c" et "a + b = c + d".

C'est lorsque Mélissa doit compléter l'égalité "7 = 2 + __", présentée uniquement sous sa forme écrite, que cette erreur apparaît une première fois. En effet, Mélissa a des difficultés à comprendre la consigne : "*Je ne comprends pas. […] Ah, est-ce qu'il faut dire combien ça donne ?*" Par la suite, elle propose 9 comme inconnue. Cette réponse traduirait donc la transformation de l'équation en une structure de type "a + b = c".

Il faut cependant relativiser l'erreur de Mélissa, puisque, lors de la séance d'enseignement, nous n'avions pas bien interprété la question de Mélissa visant à savoir si elle devait trouver combien ça donne. En effet, nous avons répondu par l'affirmative, ce qui peut avoir renforcé Mélissa dans son erreur. D'ailleurs, un de ses commentaires par la suite semble soutenir cette hypothèse. "*Je veux dire que ça donne 9. Je ne veux pas dire qu'il faut faire 9.*" Cependant, cette intervention ne cache pas le constat que Mélissa ne savait comment interpréter dès le départ une équation comme celle qui lui a été présentée. D'ailleurs, même après avoir relativisé ses propos, Mélissa éprouve encore de grandes difficultés à achever cette activité.

Une erreur semblable apparaît brièvement lorsque Mélissa doit compléter l'équation "6 + 2 = 5 + __", présente sous forme écrite et représentée par une comparaison, dans laquelle l'inconnue correspond à un sac en plastique dans lequel le nombre correct de jetons doit être inséré. La première réponse de Mélissa laisse entrevoir une transformation en une structure "a + b = c", puisqu'elle propose le nombre 8 comme inconnue. Cependant, immédiatement après, elle se rend compte de son erreur et la corrige.

Mélissa transforme une dernière fois une égalité en une structure de type "a + b = c", lorsque nous lui demandons de monter elle-même une équation de structure "a + b = c + d", avec présence d'une inconnue, représentée dans une boîte en carton. Mélissa éprouve énormément de difficultés à mettre un terme à cette activité, et une des erreurs qu'elle commet en cours de route, est de ramener l'égalité à une structure "a + b = c". En effet, à un moment donné, l'exemple qu'elle choisit correspond à "7 + 5 = __ + 2, représenté concrètement sous forme d'une comparaison. Or, dans la boîte en carton, elle a inséré 12 jetons, ce qui correspond au total de 7 et 5, mais qui ne permet pas d'obtenir une égalité. Cette erreur doit cependant également être relativisée, puisqu'elle est la suite d'une mauvaise compréhension des consignes formulées.

2.2. Caractéristiques de l'erreur

Dans le cadre de cette section, nous allons disséquer différentes caractéristiques du retour vers une conception du signe = comme opérateur. Ces erreurs – rares, il faut le souligner encore une fois – apparaissent surtout lors de l'introduction d'une nouvelle activité, qui n'a pas encore été traitée précédemment. Souvent, c'est Mélissa elle-même qui modifie ses réponses avant que nous intervenions.

2.2.1. Apparition dans de nouvelles situations

Lorsque Mélissa essaie de lire à l'envers "7 = 3 + 4" lors de la deuxième séance, elle est confrontée pour la première fois à ce type d'activité. De plus, la signification du signe = vient seulement d'être introduite lors de la séance précédente, et sa compréhension peut donc encore être fragile à ce moment.

Aucun élément nouveau n'est cependant à signaler lorsque Mélissa essaie de lire à l'envers "8 = 4 + 4" lors de la troisième séance. Cette égalité n'est pas nouvelle pour Mélissa, puisque, par mégarde, nous avions déjà traité exactement le même exemple lors d'une séance antérieure, et Mélissa n'a pas eu recours à la lecture à l'envers. Cependant, la rapidité avec laquelle elle corrige la situation rend plausible l'hypothèse d'une erreur d'inattention.

Lors de la troisième séance, Mélissa estime que l'équation "9 = __ + 2" est à l'envers. Cette évaluation se situe cependant à un moment particulier de la séquence d'enseignement : c'est la première fois que Mélissa doit traiter, uniquement à partir de l'écriture, une activité de structure "a = b + c" incluant une inconnue. La situation est analogue lorsque Mélissa transforme "7 = 2 +__" en "7 = 2 + 9".

Finalement, à deux autres occasions, alors que de nouveaux apprentissages ont été introduits, Mélissa transforme une structure afin de la faire correspondre à une conception du signe = comme opérateur. Ainsi, à l'occasion où Mélissa transforme "6 + 2 = 5 + __" en "6 + 2 = 5 + 8", nous traitons pour la première fois une égalité de structure "a + b = c + d". La dernière erreur de ce type survient, lorsque nous demandons à Mélissa de représenter elle-même une équation, activité qui n'avait pas été traitée jusque là.

2.2.2. Erreurs corrigées rapidement par Mélissa

Lorsqu'il lui arrive de retourner vers une conception du signe = comme opérateur, Mélissa se rend compte elle-même de son erreur à plusieurs reprises et corrige sans difficulté la réponse.

Ainsi, Mélissa nous fait part de sa préférence de lire l'égalité "7 = 3 + 4" de droite à gauche. Toute inquiète qu'elle est, elle accepte cependant aussi la lecture de gauche à droite. "*Si je lis toujours comme ça, j'en suis capable, mais je ne l'ai pas appris. Je peux lire comme ça, mais il faut que je fasse un effort pour le faire.*" C'est donc plus le manque d'expérience en matière de lecture de ce type d'égalités qui fait hésiter Mélissa que le refus de ces structures.

Autre exemple éloquent : alors que Mélissa commence à lire à l'envers l'égalité "8 = 4 + 4", elle se ravise, même avant d'avoir terminé la lecture de l'égalité.

Transformant "6 + 2 = 5 + __" en "6 + 2 = 5 + 8", Mélissa modifie immédiatement, et avant que nous ayons le temps d'intervenir, la réponse erronée, tout en étant en mesure de fournir une explication adéquate : "*C'est 3, parce que 6 + 2, c'est 8, et 5 + 3, c'est 8 aussi.*"

Alors que, dans les situations précédentes, l'erreur n'est pas imputable à une incompréhension majeure, tel n'est pas le cas pour toutes les situations dans lesquelles Mélissa retourne à une conception du signe = comme opérateur. Par exemple, lorsqu'il s'agit de compléter les équations "9 = __ + 2" et "7 = 2 + __", Mélissa a recours à une lecture à l'envers dans le premier cas et à une transformation en une structure "a + b = c" dans le deuxième cas. Dans ces deux exemples, l'incompréhension est réelle, puisque, par la suite, Mélissa éprouve des difficultés importantes pour mener cette activité à terme.

La réaction est analogue lorsque nous lui demandons de monter elle-même une équation de structure "a + b = c + d" comportant une inconnue, représentée par une boîte en carton non transparente dans laquelle se trouve le nombre correct d'objets. En effet, le retour vers une conception du signe = comme opérateur est seulement une parmi plusieurs difficultés qu'éprouve Mélissa face à cette tâche.

Nous pouvons donc constater que, lorsque Mélissa retourne vers une conception du signe = comme opérateur, ce n'est pas toujours une réelle incompréhension qui est à la base de cette stratégie. Quand il s'agit de lire des égalités, les erreurs de Mélissa sont plutôt reliées à la nouveauté de telles structures ou encore à un manque d'attention. Par contre, lorsqu'elle doit compléter des équations, une conception du signe = comme opérateur entraîne des difficultés plus importantes, notamment au niveau de la résolution de l'activité proposée.

3. Éléments qui peuvent expliquer la bonne performance de Mélissa

Si Mélissa a été évaluée comme étant une élève moyenne à la fin du prétest, c'est elle qui, au cours de la séquence d'enseignement, a réussi à progresser le plus facilement. Ceci peut paraître étonnant, même si on sait que l'évaluation se fonde davantage sur ses résultats scolaires en général, qui sont en dessous de la moyenne de la classe, que sur les résultats du prétest. Deux aspects que nous allons examiner peuvent contribuer à expliquer la bonne performance de Mélissa. D'une part, celle-ci réussit assez facilement à établir un lien cohérent entre une égalité ou une équation et sa représentation concrète. D'autre part, elle dispose d'une grande variété de stratégies additives et soustractives, qu'elle est en mesure d'utiliser correctement, en tenant compte des exigences de la situation à laquelle elle fait face.

3.1. Types de stratégies de résolution

Mélissa – nous allons le voir dans la section suivante – se sert essentiellement de trois types différents de stratégies. D'une part, elle a recours à des additions en faisant référence au total présent des deux côtés. D'autre part, pour compléter des égalités, elle réussit à juger habilement la situation pour déterminer si elle doit se servir d'une addition ou d'une soustraction. Finalement, si elle ne manipule pas spontanément du matériel concret au début de la séquence, elle utilise plus fréquemment cette stratégie au fur et à mesure que l'enseignement du signe = avance.

3.1.1. Recours au total présent des deux côtés du signe =

Tout au long de la séquence d'enseignement, Mélissa recourt la plupart du temps au total présent des deux côtés du signe =. Dans cette section, nous allons montrer, à l'aide de différents exemples, que cette stratégie est utilisée à la fois pour expliquer l'exactitude d'une égalité ou d'une équation et pour travailler au niveau de la situation concrète.

Alors que nous lui avons expliqué le signe = lors de la première séance, Mélissa commence immédiatement à se servir du total présent des deux côtés du signe = pour justifier la mise en place du signe =. Ainsi, lorsqu'elle doit évaluer l'égalité "4 + 5 = 9", présente sous forme écrite et représentée par une comparaison, elle explique que la même quantité est présente des deux côtés dans la situation concrète : "*On peut mettre le signe =, parce qu'ici (montre sous-ensembles de 4 et 5, à gauche), c'est 9, et c'est la même chose que 9 ici (montre ensemble de 9, à droite).*"

Mélissa est en mesure de manipuler cette stratégie de façon efficace et cohérente dès le départ. En effet, confrontée pour la première fois à une fausse égalité de structure "a __ b + c", elle ne se fie pas uniquement à la forme de l'égalité, mais prend également en considération les valeurs numériques impliquées pour conclure qu'on ne peut pas mettre le signe =. "*On ne peut pas mettre le signe = entre 9 et 1 + 7, parce que, ici (montre 9), c'est 9, et si on a 1 + 7, c'est 8, et ça (montre 9), ce n'est pas 8.*"

Mélissa réutilise spontanément cette stratégie lorsqu'elle doit évaluer des égalités plus complexes, de structure "a + b = c + d". Dès le premier exemple de ce type, elle détermine sans difficulté particulière qu'on peut placer le signe = entre "5 + 3" et "6 + 2", présents sous forme écrite et représentés sous forme de comparaison. "*On peut mettre le signe =, parce que 5 + 3, ça donne 8 et 6 + 2, ça donne 8 aussi.*" D'ailleurs, Mélissa réussit facilement à transférer cette explication à la situation concrète, puisqu'elle réunit les sous-ensembles de 5 et 3 éléments à sa gauche et ceux de 6 et 2 éléments à sa droite pour appuyer ses propos.

La même stratégie permet à Mélissa de détecter des fausses égalités. Ainsi, face à deux sous-ensembles de 1 et 7 éléments à sa gauche ainsi que deux sous-ensembles de 4 et 3 éléments à sa droite, situation également présente sous forme écrite, Mélissa, recourant au total, affirme qu'on ne peut pas mettre le signe =. "*On ne peut pas mettre le signe =, parce que 1 + 7, ça donne 8, et 4 + 3, ça donne 7.*" Mélissa réussit donc à se détacher de la forme de l'égalité pour se concentrer sur les valeurs numériques impliquées. Il s'agit d'une des principales forces de Mélissa tout au long de l'expérimentation qui a, sans doute, contribué à la bonne performance de celle-ci.

Lorsque les égalités sont uniquement présentées sous forme écrite, Mélissa juge que c'est également le recours au total présent des deux côtés qui constitue la stratégie la plus appropriée. Dans la première activité de ce type, c'est d'ailleurs un raisonnement semblable qui permet à Mélissa d'établir qu'il s'agit bel et bien d'une égalité. "*On peut mettre le signe = (entre 4 + 6 et 3 + 7), parce que 4 + 6 égale 10 et 3 + 7 égale 10.*"

Une nouvelle fois, cette stratégie permet à Mélissa de détecter des fausses égalités. Interrogée sur l'exactitude de "3 + 4 = 7 + 1", présentée uniquement sous forme écrite lors de la dernière séance, Mélissa se sert, après quelques hésitations, du total présent des deux côtés pour dénier la présence d'une égalité. "*Non, parce que 3 + 4, ça donne… (…) Je pense encore une fois. Non, ça ne fonctionne pas, parce que 3 + 4, ça donne 7, et après, ça donne 8. On n'a pas le droit de faire ça.*" En même temps, cet exemple illustre bien le degré de compréhension atteint par Mélissa en fin de séquence d'enseignement. En effet, la présence de 7 comme somme de 3 et 4 immédiatement après le signe = aurait pu inciter Mélissa à retourner vers une conception du signe = comme opérateur. Or, tel n'est pas le cas, puisqu'elle arrive bien à justifier pourquoi on ne peut pas placer le signe = dans cette situation.

Reste à rajouter que Mélissa ne se sert pas uniquement de cette stratégie lors des situations décrites. Celles-ci constituent uniquement des exemples qui servent à illustrer l'attitude générale de Mélissa dans presque toutes les activités dans lesquelles elle devait évaluer si la mise en place du signe = était appropriée. Par ailleurs, cette même stratégie s'avère extrêmement efficace pour Mélissa, puisque nous n'avons noté aucun exemple auquel elle l'a appliquée de manière erronée.

3.1.2. Aisance dans l'application de structures additives et soustractives

Si le recours fréquent au total présent des deux côtés est une des caractéristiques qui distingue Mélissa tout au long de la séquence, l'aisance avec laquelle elle complète des équations en se servant d'additions ou de soustractions est encore plus remarquable. Grâce à cette section, nous allons montrer que Mélissa a une excellente maîtrise des différentes structures additives. Elle manie avec aisance l'addition ainsi que ses propriétés, surtout la commutativité, et elle utilise avec une même habileté la soustraction pour compléter différents types d'équations.

a) Addition et ses propriétés

Mélissa utilise l'addition, surtout pour résoudre des équations de différents types et pour déterminer si la mise en place du signe = est appropriée dans des situations données. Dans cette section, nous allons décrire la manière dont Mélissa se sert de l'addition pour compléter des équations, mais aussi l'aisance avec laquelle elle manie la commutativité de l'addition.

Mélissa a recours à l'addition pour compléter des équations de différentes structures. Face à l'équation "6 + __ = 8, sous forme écrite et représentée comme une comparaison dans laquelle l'inconnue correspond à une boîte en carton non transparente, elle utilise l'addition comme stratégie de résolution. *"Il y en a 2 dans la boîte, parce que 6, et encore 2, ça donne 8.*"

La réaction de Mélissa est similaire lorsqu'elle doit compléter "10 = 7 + __", présenté sous forme écrite seulement. "*Il faut mettre un 3, parce que 7, et après encore 1, plus encore 1 et encore 1, c'est 10.*" Il faut cependant noter que, si Mélissa utilise de manière efficace une addition pour compléter des équations de structure "a = b + c" ou "a + b = c", elle se sert plus souvent d'une soustraction lorsqu'elle rencontre ces tâches.

L'addition redevient la stratégie préférée lorsque nous demandons à Mélissa de compléter des équations de structure "a + b = c + d". Tel est le cas par exemple lorsqu'elle doit compléter "7 + __ = 5 + 5", présent sous forme écrite et représenté sous forme de comparaison, l'inconnue correspondant à une boîte en carton. Mélissa se sert d'une addition pour obtenir le même total des deux côtés du signe =. "*Il faut mettre un 3. J'ai pensé 7, et 5 + 5, ça donne 10, alors + 3, ça donne 10.*"

La stratégie de Mélissa est d'ailleurs similaire dans plusieurs autres situations de ce type, dont certaines impliquent de compléter une équation à partir de son écriture uniquement. Lorsque Mélissa doit compléter "5 + __ = 2 + 8", elle se sert d'une addition pour obtenir le même total des deux côtés du signe =. "Il faut écrire 5, parce que 2 + 8, ça donne 10, et 5 + 5, ça donne 10 aussi."

En général, nous pouvons affirmer que Mélissa n'a que très peu de difficultés à gérer des équations de structures "a + b = c + d". Elle ne se trompe presque jamais et arrive à trouver la solution attendue assez rapidement.

Un autre indice que Mélissa se sent très à l'aise avec les différentes structures additives est le fait qu'elle se sert habilement de la commutativité, et ceci non seulement pour les tâches qui touchent plus spécifiquement cette propriété.

La commutativité est familière à Mélissa dès le début de la séquence d'apprentissage. Tel est par exemple le cas lorsqu'elle doit évaluer l'exactitude de "8 = 2 + 6" : Elle transforme l'addition 2 + 6 en 6 + 2 lorsqu'elle établit le total des deux côtés. "*On peut mettre le signe =, parce que 6, j'ajoute 1, ça donne 7, plus encore 1, ça donne 8.*" Mélissa commence donc par le terme le plus grand de l'addition pour faciliter l'opération. De manière isolée, l'attitude de Mélissa pourrait être considérée comme un retour vers une conception du signe = comme opérateur. Cependant, elle explique sa stratégie un peu plus tard, en analysant une situation similaire. "*Parce que, en premier, il faut toujours commencer par le plus grand.*" La stratégie de Mélissa n'est donc nullement l'expression d'une mauvaise compréhension, mais plutôt un indice de son habileté à utiliser la commutativité de l'addition.

Ce constat se confirme, par ailleurs, lorsque Mélissa doit aborder les différentes tâches qui traduisent la commutativité de l'addition, au cours de la dernière séance d'enseignement. Nous lui demandons de compléter l'égalité "6 + 2 = __ + 6", présente sous forme écrite et représentée par une comparaison, dans laquelle l'inconnue correspond à un sac en plastique transparent dans lequel le nombre correct de jetons doit être ajouté. La réponse de Mélissa est instantanée et correcte, ce qui nous permet de croire qu'elle s'est servie de la commutativité de l'addition, même si, dans son explication, elle fait plutôt référence au total présent des deux côtés. "*Parce que 6 + 2, ça donne 8, et 2 + 6, ça donne 8 aussi.*"

Le recours à la commutativité est moins évident lorsque les équations impliquent des nombres qui ne sont pas familiers à Mélissa. Face à "__ + 15 = 15 + 13", présent sous forme écrite et représenté comme comparaison, l'inconnue correspondant à une boîte en carton, elle hésite au début, mais finit par trouver la bonne réponse, probablement en ayant recours à la commutativité.

La situation est similaire, lorsque Mélissa doit compléter "23 + __ = 45 + 23", présent sous forme d'écriture seulement. En effet, elle n'est pas certaine au départ d'être en mesure de trouver une réponse appropriée. "*C'est plus difficile. Je n'arriverais jamais à faire ça avant la sonnerie*". D'ailleurs, les nombres présents sont inconnus à tel point que Mélissa n'est pas en mesure de lire l'équation. Après quelques hésitations cependant, Mélissa détermine 45 comme étant l'inconnue, en se basant sur la commutativité de l'addition.

b) Soustraction

Lorsqu'il s'agit de compléter une équation de structure "a = b + c" avec une inconnue, le recours à une soustraction est une stratégie pertinente, mais ce n'est pas la plus facile à utiliser. Prenons comme exemple l'équation "9 = __+ 2", présente sous forme écrite et représentée comme comparaison et où l'inconnue correspond à un sac transparent dans lequel il faut ajouter 7 jetons. Une des stratégies les plus faciles pour résoudre cette activité serait de séparer l'ensemble de 9, à gauche, en deux sous-ensembles, identiques à ceux représentés à droite. Comme un de ces sous-ensembles contient 2 éléments, on sait automatiquement que l'autre sous-ensemble correspondra à 7 éléments.

Une autre stratégie est d'avoir recours à une addition ou un double comptage pour déterminer combien de jetons il faut rajouter à l'ensemble de 2 éléments pour arriver à un total de 9. Pour ce faire, certains enfants se souviennent de calculs qu'ils savent par cœur, tandis que d'autres utilisent leurs doigts ou du matériel pour effectuer un double dénombrement.

Même si les deux stratégies mentionnées précédemment sont probablement les plus faciles pour mener à terme l'activité décrite, Mélissa ne les utilise pas. Elle choisit, par contre, une stratégie beaucoup plus complexe, qui est la soustraction. Deux éléments déterminent la complexité de cette stratégie. D'une part, l'enfant qui s'en sert doit avoir compris que l'addition et la soustraction sont des relations inverses. D'autre part, il doit posséder une compréhension approfondie de l'opération de soustraction. L'opération inverse de l'ajout d'une inconnue à un ensemble de 2 serait de retirer de nouveau l'inconnue du total. En d'autres mots, l'inverse de "2 + __ = 9" serait "9 – __ = 2". Or, cette dernière structure n'est pas plus utile que la première pour déterminer la valeur de l'inconnue. Elle doit donc encore une fois être transformée en "9 – 2 = __, ce qui nécessite des connaissances élevées au niveau des structures additives et soustractives.

Néanmoins, Mélissa y a recours dans la majorité des cas pour compléter des équations de structure "a = b + c". En général, elle le fait de manière efficace, et ce n'est qu'une seule fois qu'elle utilise la soustraction de manière non appropriée.

Ainsi, lorsque Mélissa doit traiter l'activité que nous venons de décrire dans les paragraphes précédents, c'est une soustraction qu'elle choisit comme stratégie de résolution : "*J'ai pensé qu'il y en a 9. On les met ensemble, on sort le 9^e^ et le 8^e^, et après, on voit que ça donne 7.*"

Son approche est similaire dans plusieurs exemples analogues, dont certains sont présentés sous forme d'inclusion, l'inconnue étant représentée par une boîte en carton non transparente. Ainsi, lorsque Mélissa doit compléter "3 + __ = 10", la soustraction s'avère efficace, après une erreur de dénombrement. En effet, la première solution que Mélissa propose est qu'il doit y avoir 6 jetons dans la boîte, mais elle se reprend immédiatement, en expliquant qu'elle s'est trompée en comptant sur ses doigts. "*Je me suis trompée, parce que j'ai oublié de sortir le dixième doigt*." C'est donc parce qu'elle fait un dénombrement à partir de 9 qu'elle obtient un résultat erroné. Cette erreur relève cependant davantage de l'inattention, puisque, immédiatement après, elle fournit une description plus adéquate. "*Il doit y avoir 7 jetons dans la boîte. J'ai fait comme ça (montre les 10 doigts), et j'en enlève 3, et il en reste 7*."

Si Mélissa utilise principalement la soustraction lorsqu'il s'agit de compléter des équations de structure "a = b + c", elle s'en sert également, une seule fois, pour traiter une équation encore plus complexe. Lors de la dernière séance, Mélissa est face à "3 + __ = 7 + 2", présent sous forme écrite seulement, et c'est clairement une soustraction qui lui permet de trouver l'inconnue. "*C'est 6, parce que j'ai fait 3, et après j'ai pensé 9 (probablement le total de 7 et 2, à droite), et j'en ai enlevé 3, et j'ai vu qu'il y en avait 6*."

Alors que la soustraction s'avère généralement efficace chez Mélissa, elle lui pose cependant problème à une occasion. Mélissa se trouve en face d'un ensemble de 6 jetons et d'une boîte transparente, à gauche, et d'un ensemble de 9 jetons, à droite, ainsi que de leurs écritures respectives. Exhortée à déterminer combien de jetons se trouvent dans la boîte pour mettre le signe =, Mélissa se sert d'une soustraction, mais son raisonnement reste nébuleux. *"Il y en a 5 dans la boîte.[…] Parce que, on a 6 ici (montre 6 doigts sur ses mains), on en sort 1, et il nous reste 5*." Dans cette situation, c'est la consigne de départ qui semble poser problème à Mélissa, et non pas la structure additive en tant que telle. En effet, lorsque nous la questionnons sur la signification du signe =, elle se ravise et se sert d'une stratégie additive pour déterminer l'inconnue. "*Je comprends. Il y en a 3 dans la boîte, parce que j'en ai 6, et j'en rajoute encore 3. D'abord, je n'avais pas très bien réfléchi, mais après, c'est allé mieux et j'ai trouvé 3*."

En général, nous pouvons affirmer que Mélissa se sert de manière cohérente de la soustraction pour résoudre – avec une facilité manifeste – différents types d'équations. L'aisance avec laquelle elle manipule différentes structures additives peut avoir contribué à sa performance.

c) Manipulation du matériel concret

En principe, Mélissa n'utilise pas de manière spontanée la stratégie de redistribution du matériel concret pour montrer que la même quantité est présente des deux côtés ou pour compléter des équations. Tout en étant capable d'appliquer cette stratégie, Mélissa n'y a tout simplement pas recours, se fiant à des stratégies plus abstraites.

Lors de la première séance, nous demandons à Mélissa de nous montrer, en manipulant des crayons, que la même quantité est présente des deux côtés dans la représentation concrète de "8 = 2 + 6"sous forme de comparaison. Elle réunit les deux sous-ensembles de 2 et 6 en un ensemble de 8, mais ne pense pas à séparer l'ensemble de 8 en deux sous-ensembles de 2 et 6. Notre demande de trouver une autre manière de démontrer la présence des mêmes quantités des deux côtés à l'aide du matériel concret se solde par un échec. "*On peut les mettre comme ça, l'un au-dessus de l'autre, sans que ça tombe*". Mélissa est consciente qu'une réponse spécifique est attendue d'elle, mais elle ne se sent pas en mesure de proposer des solutions alternatives.

Afin de faciliter cette tâche, nous décidons de lui expliciter la stratégie de redistribution du matériel. Nous lui présentons la représentation concrète sous forme de comparaison de "7 = 3 + 4", tout en recouvrant les deux sous-ensembles de 3 et 4 éléments d'un contenant en plastique transparent. Les jetons de ces sous-ensembles ne pouvant donc plus être bougés, nous demandons à Mélissa de montrer à l'aide du matériel concret que la même quantité est représentée des deux côtés. Mélissa sépare sans autre hésitation l'ensemble de 7 en deux sous-ensembles de 3 et 4 éléments, fournissant ainsi la preuve qu'elle est bel et bien en mesure d'appliquer la stratégie de redistribution des jetons.

Ce premier succès ne l'incite pas, il est vrai, à y avoir recours par la suite. Mélissa préfère, dans la grande majorité des cas, renoncer au matériel concret et se servir d'additions et de soustractions au niveau formel pour résoudre les différentes activités proposées, autre indice de la compréhension de Mélissa des relations d'équivalence et d'égalité ainsi que des structures additives.

Cette hypothèse est d'ailleurs confirmée vers la fin de la séquence d'enseignement, alors que Mélissa recommence à se servir de la stratégie de redistribution. Cette fois encore, elle n'a pas recours au matériel concret, mais à la redistribution mentale. Complétant par exemple "5 + 4 __ 6 + 3", à partir de l'écriture seulement, Mélissa fournit, après s'être référée au total présent des deux côtés, une deuxième explication, qui ressemble à une redistribution. "*Regarde, ici, c'est 5 + 4, et ici, c'est 6 + 3 ; alors on peut remplacer ici le 5 par un 6, mais si c'est 6, il ne faut pas mettre 4, mais quelque chose d'un peu plus petit.*" Mélissa ajoute donc mentalement un élément à l'ensemble de 5 et en retire 1 à l'ensemble de 4 dans la première addition afin d'obtenir exactement la même expression de l'autre côté.

Une autre forme de redistribution, effectuée mentalement, apparaît lorsque Mélissa doit décider combien de jetons elle doit ajouter à un ensemble de 5 éléments, représenté à droite, pour obtenir la même quantité qu'à gauche, où se trouvent 3 ensembles de 4, 2 et 1 éléments respectivement. En effet, Mélissa décide d'écrire un 2 à la place réservée à l'inconnue dans "4 + 2 + 1 = 5 + __". "*Parce que, ici, c'est écrit 4 + 2 + 1, alors j'ai fait 4 + 1, ça donne 5, et plus 2*"

On peut donc conclure que, si Mélissa ne se sert pas spontanément d'une stratégie de manipulation ou de redistribution du matériel concret, ce n'est pas parce qu'elle ne serait pas en mesure de la faire. Sa réticence est plutôt l'expression du fait qu'elle ne ressent plus le besoin de manipuler du matériel, mais qu'elle est capable de les traiter au niveau formel en travaillant avec des additions et des soustractions.

3.2. Liens entre l'écriture et la situation concrète facilement établis

Dans le cadre de cette section, deux aspects différents sont traités. D'une part, Mélissa relie facilement une écriture à une situation concrète. D'autre part, elle possède une grande capacité à gérer simultanément l'écriture et la situation concrète lors de la transformation d'une fausse égalité en une égalité, ce qui constitue un autre de ses atouts.

3.2.1. Relier une égalité à une représentation concrète

Dès le début de la séquence d'enseignement, et ce même avant l'explication du signe =, Mélissa démontre sa facilité à relier la situation concrète à l'écriture. Ainsi, Mélissa est immédiatement en mesure de désigner les jetons qui correspondent aux nombres de l'égalité "5 + 3 = 8" : elle désigne les deux ensembles de 5 et 3, à sa gauche, ainsi que l'ensemble de 8, à sa droite, et réussit, par ce fait même, à tenir compte du contexte de comparaison de la représentation.

Mélissa utilise la même stratégie lorsqu'elle doit relier des égalités de structure "a = b + c" à une représentation sous forme de comparaison. Toujours au cours de la première séance, mais après l'explication du signe =, Mélissa arrive à désigner dans la représentation concrète sans difficultés les jetons qui correspondent aux différents nombres dans "9 = 4 + 5".

Lorsque nous demandons à Mélissa de représenter concrètement l'égalité "3 + 6 = 9", elle choisit également un contexte de comparaison. Ceci est intéressant en ce sens que la plupart des représentations concrètes qu'elle a rencontrées jusque là correspondaient à des inclusions. Dans un contexte scolaire, on demande souvent de déterminer le total après l'ajout d'un certain nombre d'éléments à un ensemble de départ. Lorsque l'enfant fait une addition en comptant sur ses doigts, il est également en présence d'une représentation concrète comme inclusion de cette addition. Dans la présente situation, Mélissa a cependant réussi à se détacher rapidement d'une telle représentation, pour disposer les jetons sous forme de comparaison.

Par ailleurs, Mélissa choisit le même type de représentation lors de la cinquième séance, quand nous lui demandons de montrer l'égalité "4 + 6 = 3 + 7" avec le matériel concret. Elle place alors deux ensembles de 4 et 6 jetons à sa gauche et deux ensembles de 3 et 7 jetons à sa droite, ce qui correspond à une situation de comparaison.

Si Mélissa n'a aucune difficulté à déterminer ce qui est équivalent dans des situations de comparaison, elle éprouve certains problèmes lorsqu'elle est face à des situations d'inclusion. Lorsque nous lui demandons de montrer les objets correspondant à "2 + 4 =6" dans une représentation inclusive, les explications de Mélissa sont moins convaincantes. "*Ici, (montre le sous-ensemble de 2), c'est 2, et ici (montre le sous-ensemble de 4), c'est 4. On dit que c'est 6, parce que c'est 6… C'est parce que ça donne 6*". Mélissa n'est donc pas en mesure d'exprimer qu'au niveau concret, le total des jetons représente exactement la même quantité que la réunion des deux sous-ensembles.

La différence entre une représentation concrète sous forme d'inclusion et sous forme de comparaison semble d'ailleurs difficile à établir. Au début de la troisième séance, nous confrontons Mélissa à deux représentations concrètes différentes de l'égalité "3 + 6 = 9", sous forme, l'une de comparaison et l'autre, d'inclusion. Lorsque nous demandons à Mélissa d'expliquer les différences entre les deux représentations, elle réussit à décrire la situation de comparaison, mais son exposé sur la représentation inclusive laisse à désirer.

> "Les deux situations sont différentes, parce qu'ici (montre la représentation sous forme de comparaison), c'est la même chose ici (montre sous-ensembles de 3 et 6, à gauche) et là (montre ensemble de 9, à droite). Ici (montre situation inclusive), on n'a pas d'autres jetons (les 9 jetons ne sont pas représentés séparément), mais on peut quand même mettre le signe =."

Suite à notre demande de pousser plus loin son explication, Mélissa réussit cependant à circonscrire un peu mieux les différences entre les deux situations. "*(Montre situation de comparaison), c'est 9 ici (montre ensemble de 9 à droite) et 3 + 6 là (montre ensembles de 3 et 6, à gauche). Et ici (montre situation inclusive), il y a 9 jetons, mais on peut les séparer en 3 et 6*." Même si cette réponse n'est pas encore tout à fait satisfaisante, Mélissa reste l'élève qui réussit à fournir l'explication la plus convaincante pour décrire la différence entre les deux contextes de représentation. Nous disposons donc d'un autre indice que Mélissa a relativement peu de difficultés à relier une écriture à la situation concrète.

3.2.2. Gestion simultanée de l'écriture et de la représentation concrète

En général, Mélissa ne modifie pas simultanément l'écriture et la représentation concrète lorsqu'elle doit changer une fausse égalité en une égalité. Cependant - nous allons le voir par la suite - il suffit souvent d'une intervention minime pour qu'elle se rende compte que l'aspect qu'elle n'a pas encore touché doit également être modifié.

Lors de la première séance, Mélissa doit évaluer l'écriture "6 = 2 + 3", présente sous forme écrite et représentée comme comparaison. Après avoir déterminé que le signe = n'est pas approprié, Mélissa enlève un jeton de l'ensemble de 6, à gauche, mais ne modifie pas tout de suite l'écriture. Cependant, suite à une intervention, Mélissa apporte les changements appropriés. "*Ce n'est pas correct. Il faut sortir le 6 ici, et le remplacer par un 5.*"

Au cours de la deuxième séance, Mélissa, face à une situation similaire de structure "10 = 6 + 3", modifie également la situation concrète en premier. Cependant, dès que nous lui demandons si on peut mettre le signe =, elle se rend compte que l'écriture doit être modifiée elle aussi.

Si Mélissa traite la situation concrète en premier lors d'activités de structure "a = b + c", elle se concentre d'abord sur l'écriture dans des fausses égalités de structure "a + b = c + d". Ainsi, lors de la cinquième séance, elle doit évaluer "3 + 3 = 2 + 5" : Mélissa adopte correctement l'écriture, en remplaçant "2 + 5" par "1 + 5", mais ne change pas spontanément la situation concrète. Ce n'est qu'après intervention de notre part qu'elle y apporte les modifications appropriées. D'ailleurs, sa réaction est similaire, alors qu'elle traite une autre activité de cette structure, un peu plus tard durant la même séance.

En analysant ces situations, nous nous sommes demandé pourquoi Mélissa se réfère d'abord à la situation concrète dans des structures "a = b + c", alors que, pour des structures de type "a + b = c + d", elle considère en premier l'écriture. Selon nous, l'explication la plus plausible est que Mélissa a réalisé des progrès tout au long de la séquence d'enseignement. Ainsi, nous supposons que Mélissa se détache progressivement des objets concrets, pour se concentrer uniquement sur l'écriture. Cette explication serait cohérente avec le moment à l'intérieur de la séquence où ces activités sont présentées. En effet, les fausses égalités de structure "a = b + c" sont présentées au début de la séquence, alors que l'attribution d'une nouvelle signification au signe = est encore très récente. Par contre, celles de structure "a + b = c + d" se retrouvent au milieu de la séquence, alors que de nombreuses activités concernant le signe = ont déjà été effectuées.

Nous en concluons que Mélissa n'éprouve pas de difficultés à transformer des fausses égalités en égalités. Par contre, elle ne réussit pas toujours à traiter simultanément la situation concrète et l'écriture.

COMPRÉHENSION LORS DU POST-TEST

Tout au long de la séquence d'enseignement, Mélissa nous a donné l'impression qu'elle réalisait des progrès importants. Cette impression s'est confirmée lors du post-test. Par rapport à la dernière séance d'intervention, elle n'a pas régressé ; par ailleurs, elle comprend parfaitement la signification du signe =. Les seules difficultés apparentes sont dues à des erreurs de dénombrement. La présente section servira donc à décrire brièvement la performance de Mélissa lors du post-test.

En évaluant des égalités de différentes structures, Mélissa conçoit clairement le signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence. "*Le signe = veut dire que c'est la même chose.*" Ainsi, dans toutes les activités concernées, Mélissa fait référence au total présent des deux côtés pour déterminer si la mise en place du signe = est appropriée ou non.

Deux événements sont cependant dignes de mention. D'une part, Mélissa hésite face à l'égalité "6 = 6" : "*Je ne comprends pas.*" En effet, ce type de structure n'a pas été abordé dans le cadre de notre séquence d'enseignement. Malgré l'absence d'un enseignement explicite, Mélissa réussit à justifier correctement pourquoi la mise en place du signe = est appropriée. "*On peut mettre le signe =, parce que 6, c'est la même chose que 6.*"

D'autre part, Mélissa semble ne pas être certaine quelle signification attribuer à "4 + 2 = 6 + 1". Sa première question pourrait traduire son souhait d'insérer un deuxième signe = derrière le dernier chiffre : "*Et c'est où que c'est écrit = ici (en montrant la fin de l'égalité).*" Cependant, comme Mélissa n'élabore pas davantage sur cette question, il nous est impossible d'affirmer avec certitude que celle-ci avait l'intention d'ajouter "= 7" derrière l'égalité et de transformer ainsi le signe = en un opérateur. Une analyse plus approfondie de la bande vidéo ne nous a pas permis non plus d'en extraire des informations plus concluantes. De toute façon, Mélissa se ravise immédiatement et semble comprendre qu'il faut déterminer si la même quantité est représentée des deux côtés du signe =. "*Ah, il faut dire si c'est la même chose !*"

Mélissa a réussi à résoudre également différentes équations sans se heurter à des difficultés liées à la compréhension du signe =. Seules quelques erreurs mineures dues à des erreurs de dénombrement ont porté ombrage à la performance de Mélissa.

Tout comme durant la séquence d'enseignement, Mélissa se distingue surtout par son aisance à manipuler des structures additives et soustractives complexes. À plusieurs reprises, elle se sert de soustractions. Tel est le cas lorsqu'elle doit compléter "7 + 1 = __ + 2" : "*Il faut mettre 6, parce que j'ai pensé 8 – 2, et j'ai vu que c'était 6*". Mélissa réussit donc à gérer simultanément le recours au total présent des deux côtés et l'emploi d'une stratégie de soustraction.

Mélissa semble également maîtriser la commutativité de l'addition. Lorsqu'elle doit compléter "__ + 23 = 23 + 17", elle ne fait pas référence au total présent des deux côtés, mais se sert, après quelques hésitations, de cette propriété pour déterminer la valeur de l'inconnue. "*Il faut écrire 17, parce que c'est 17 ici (montre 17 à droite du signe =), et ces deux-là (montre les 23 à gauche et à droite du signe =) sont identiques, alors il faut écrire 17.*"

Avec une constance égale, Mélissa gère tant les activités sur la compréhension abstraite que celles qui visent à évaluer la compréhension, ces dernières permettant une nouvelle fois d'illustrer son aisance à travailler les structures additives. En effet, dans deux des cinq tâches présentées, elle ne se sert pas du matériel présenté, mais effectue une soustraction pour déterminer l'inconnue dans différentes représentations concrètes. Dans deux autres cas, Mélissa utilise du matériel concret pour mener à bien le processus de résolution. Tel est le cas par exemple, lorsqu'elle trouve, à sa gauche, un ensemble d'un élément et une boîte non transparente, et, à sa droite, deux ensembles de 3 et 4 éléments. Alors que nous lui indiquons qu'il y a la même quantité des deux côtés, Mélissa se sert d'une redistribution des jetons pour déterminer qu'il doit y avoir 6 jetons dans la boîte en carton. "*J'ai vu qu'il y en a uniquement 1 ici (montre le jeton à sa gauche). Alors, j'ai sorti 1 ici (sort 1 jeton de l'ensemble de 3, à droite), et j'ai mis le reste ensemble (réunit les ensembles de 2 et 4, à droite), et j'ai constaté qu'il y en avait 6.*"

LE CAS DE MATHIEU

Mathieu, classifié comme un élève fort, a réalisé, tout au long de la séquence d'expérimentation, d'importants progrès dans sa compréhension du signe =. Dans une première partie, nous décrirons la conception initiale de Mathieu, telle qu'elle est apparue durant le prétest. Nous allons y voir que, malgré des débuts de compréhension comme indicateur de relation, Mathieu conçoit surtout le signe = comme un opérateur. Une deuxième partie fera par la suite état de l'évolution de cette conception, tout au long de la séquence d'enseignement, vers une compréhension plus appropriée du signe =.

UTILISATION COMME OPÉRATEUR LORS DU PRÉTEST

Durant le prétest, le sens que Mathieu attribue au signe = semble confus. D'une part, il refuse d'accepter certaines équations correctes, concevant dans sa justification le signe = comme opérateur. D'autre part, il comprend occasionnellement le signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence, surtout lorsqu'il apparaît dans des égalités de structure "a + b = c" et "a = a".

Ainsi, Mathieu accepte comme étant correcte l'écriture "4 + 5 = 9", et sa justification semble vouloir indiquer qu'il ne considère plus le signe = comme simple opérateur : "*Le signe =, on le met quand c'est la même chose. Ici, c'est plus (montre le signe +), et ici, c'est la même chose (montre le signe =). C'est la même chose ici (montre 4 + 5) et ici (montre 9).*"

Son explication est similaire lorsqu'il est amené à se prononcer sur "5 = 5". Mathieu accepte cette écriture, en se basant sur le fait que le même nombre est présent des deux côtés du signe =. "*On peut mettre un signe = ici, parce que, quand c'est 5, ça ne deviendra pas 6, ça restera toujours 5.*" Nous présumons cependant que Mathieu connaît la structure des deux égalités décrites précédemment. En effet, la première correspond à l'égalité classique de type "a + b = c", souvent utilisée dans les manuels de mathématiques, et la deuxième répond au schéma "a = a", que Mathieu a fort probablement déjà rencontrée lors de la comparaison de collections.

La réaction de Mathieu est différente face à l'addition "5 + 3 = 8", représentée concrètement sous forme d'une comparaison et de manière symbolique. Si cette activité ne fait pas partie du prétest en tant que tel, elle se situe cependant au tout début de la première séance d'enseignement, avant même l'explication du signe =, Mathieu n'ayant pas encore bénéficié d'un enseignement.

Dans cette situation, Mathieu devrait connaître l'égalité présentée. Il base cependant son explication sur une toute autre conception du signe =. "*Ici (montre les deux ensembles de 5 et 3 jetons à sa gauche), c'est un calcul. Et ici, c'est le résultat (montre les 8 jetons à sa droite), alors on peut mettre un signe = (entre l'expression 5 + 3 et 8).*" Il attribue au signe = exclusivement la qualité d'un opérateur, et ce malgré la présence d'une représentation concrète qui devrait, en principe, faciliter la reconnaissance de la relation d'équivalence.

Cette conception revient aussi lorsque Mathieu est confronté à des égalités qui lui sont probablement inconnues. Face à l'égalité "7 = 3 + 4", Mathieu exprime son désaccord, concevant le signe = comme opérateur. "*Ce n'est pas bon […] parce que c'est à l'envers. Ce n'est pas bien fait.*" Ici, l'absence d'une structure question – réponse semble donc déterminer le refus de Mathieu.

La réaction de Mathieu est similaire face à l'égalité "3 + 4 = 1 + 6", puisqu'il la réfute en se basant sur une conception du signe = comme opérateur. En même temps, sa réponse laisse entrevoir le sens ambigu qu'il semble attribuer au terme « égale » : "*Je dis qu'on ne peut pas mettre le =, parce que c'est déjà égal, mais après il y a un autre calcul.*" Pour Mathieu, le terme « égale » n'indique donc pas une équivalence, mais constitue plutôt une incitation à fournir une réponse.

D'ailleurs, sa compréhension du terme « la même chose » semble également être ambiguë. Ainsi, Mathieu lit de droite à gauche et transforme l'équation "7 = __ + 5" en "5 + 2 = 7", n'acceptant pas l'écriture "7 = 2 + 5". "*Ce n'est pas correct, parce que la même chose qu'un autre calcul (en montrant l'expression 2 + 5 derrière le signe =), je ne crois pas que ça existe.*" Ici, Mathieu utilise, d'une part, le terme « la même chose », qui indique habituellement une relation d'équivalence, et conçoit, d'autre part, le signe = comme un opérateur. Reste à souligner que cette ambiguïté n'apparaît que lorsque les activités à résoudre se situent exclusivement au niveau du langage formel. Lors des activités qui visent à évaluer la compréhension abstraite et procédurale des relations d'équivalence et d'égalité, Mathieu n'a aucune difficulté et emploie correctement, c'est-à-dire dans le sens d'un indicateur d'une relation, l'expression « la même chose que ».

ÉVOLUTION VERS UNE CONCEPTION PLUS ADÉQUATE AU COURS DE LA SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Cette section montre que Mathieu progresse tout au long de la séquence d'enseignement, la modification du sens attribué au signe = n'allant cependant pas de soi et nécessitant plusieurs activités. Vers la fin de la séquence, Mathieu est cependant en mesure d'utiliser le signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence dans des situations diverses. La section comprend deux parties. La première sert à décrire les difficultés que Mathieu rencontre immédiatement après l'explication de la signification du signe =. La deuxième témoignera par la suite des progrès réalisés par Mathieu au cours des séances suivantes.

1. Réactions à l'explication du signe =

Immédiatement après l'explication du signe =, Mathieu semble accepter une écriture de structure "a = b + c", mais il insiste au début pour lire l'égalité de droite à gauche. "*Ce serait mieux comme ça (montre de droite à gauche), parce qu'on peut lire le calcul, et après le =, voir si c'est la même chose, mais 8 = 5 + 3, ça ne donne rien*." Ici, Mathieu attribue au signe = à la fois un sens d'opérateur et d'indicateur d'une relation d'équivalence. D'une part, il vérifie s'il y a la même quantité des deux côtés, et, d'autre part, il n'accepte pas cette égalité, parce qu'elle ne correspond pas au schéma question – réponse.

Par la suite, le raisonnement de Mathieu va beaucoup plus loin. Après avoir donné l'impression d'avoir compris la signification du signe =, il essaie, sans intervention de notre part, de démontrer ses connaissances à l'aide d'une soustraction. Ainsi, il représente avec des jetons, sur la feuille de gauche, une situation qui correspond à 9 – 1, et sur la feuille de droite, il place 8 jetons, et il écrit l'égalité "9 – 1 = 8" correspondante. Lorsque nous lui demandons si on peut également inverser la situation concrète et l'égalité, de manière à obtenir "8 = 9 – 1", Mathieu accepte cette écriture: "*Je pense que ça marche aussi. Parce que les calculs, on peut les lire comme ils sont*". Cependant, Mathieu commence à hésiter lorsque nous lui posons d'autres questions sur cette écriture, et, finalement, la remplace par l'égalité "8 + 0 = 8". Se sentant hésiter, Mathieu préfère se rabattre sur un type d'égalité qui lui est beaucoup plus familier.

2. Retour vers l'ancienne conception

Parmi les erreurs que Mathieu commet en relation avec le signe = tout au long de nos interventions, la plus fréquente est de revenir sur son ancienne conception du signe =. Cette erreur se manifeste essentiellement sous deux formes différentes que nous allons décrire dans une première partie. Ainsi, Mathieu essaie de ramener l'égalité à une structure "a + b = c". Parfois, il a aussi recours à la lecture à l'envers des égalités afin de retrouver une forme qui est cohérente avec sa conception du signe = comme opérateur.

Trois particularités caractérisent ce type d'erreur. Tout d'abord, il apparaît surtout dans des situations qui sont nouvelles pour Mathieu, et beaucoup moins lorsqu'il doit résoudre des activités, qu'il connaît parce qu'il en a déjà rencontré du même type au cours de la séquence d'enseignement. Ensuite, une compréhension du signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence dans un certain nombre de situations n'implique pas nécessairement que Mathieu continue à considérer le signe = comme connecteur logique dans d'autres situations. Finalement, chez Mathieu, la fréquence de cette erreur diminue au fur et à mesure que sa compréhension du signe = progresse, sans toutefois disparaître complètement. En effet, lors du post-test, effectué dix jours après la fin de la séquence d'enseignement en tant que telle, nous avons pu observer sa réapparition.

2.1. Portrait de l'erreur

Dans cette section, nous allons décrire plus en détail comment se manifeste le retour à l'ancienne conception du signe =. Deux formes possibles sont la transformation de l'égalité en tant que telle, ainsi que la lecture de droite à gauche, qui permet de rentrer une égalité dans une structure "a + b = c" et, par conséquent d'être cohérent avec une structure du signe = comme opérateur. Finalement, une troisième forme plus rare de cette erreur consiste à ramener les expressions présentes des deux côtés du signe = à exactement la même forme. Dans le cadre de celle-ci, Mathieu ne ramène plus l'égalité à une structure question–réponse, mais revient plutôt à la conception qu'exactement la même expression doit être présente des deux côtés du signe =.

2.1.1. Transformation de l'égalité en une structure de type "a + b = c"

Tout au long de la séquence d'enseignement, Mathieu a tendance à régresser dans sa compréhension du signe =, en lui attribuant de nouveau une signification d'opérateur, lorsqu'il est confronté à des difficultés. Cependant, la transformation de l'égalité en une structure de type "a + b = c", qui accompagne cette régression, prend des formes différentes au fur et à mesure que la séquence d'enseignement avance. Comme nous allons le voir dans cette section, elle se manifeste dans des situations assez simples au début, alors qu'elle apparaît dans des contextes de plus en plus complexes au fur et à mesure que la séquence d'enseignement avance.

Dans une des premières activités de la deuxième séance d'enseignement, Mathieu est face à 9 jetons, qui sont séparés en deux sous-ensembles de 5 et 4 éléments. Dans ce cadre, il exprime des doutes à accepter l'écriture "9 = 5 + 4", qui se trouve devant lui. "*Je changerais quelque chose ici. J'effectuerais le calcul d'abord (transforme l'égalité en "5 + 4 = 9"). Si c'était comme ça, ce serait correct.*" Malgré le fait que Mathieu a transformé la situation en une structure "a + b = c", celle-ci ne semble cependant pas être la seule qui est acceptable pour lui. À la suite de nos questions, il accepte également l'écriture "9 = 5 + 4". "*C'est toujours la même chose. Peu importe comment c'est tourné, c'est toujours la même chose.*"

Cette situation montre donc qu'ici, Mathieu accepte les deux types d'écritures, mais semble être plus à l'aise avec la première d'entre elles. Cette hypothèse se confirme d'ailleurs au cours des séances suivantes, puisque Mathieu insiste plusieurs fois, dans des situations différentes et sans intervention de notre part, qu'une transformation d'une égalité du type "a = b + c" en "b + c = a" serait également possible.

Au cours de la quatrième séance, Mathieu persiste à obtenir une structure de type "a + b = c" dans certaines situations. Lorsqu'il doit résoudre l'équation "7 = 2 + __", uniquement à partir de l'écriture, sa première réaction traduit sa volonté de transformer cette équation en une structure "a + b = c" : "*Est-ce qu'il faut que je trouve le résultat ?*" Au lieu de rechercher la valeur de l'inconnue dans cette équation, Mathieu tente donc de déterminer la somme des nombres impliqués.

Une autre forme de cette erreur apparaît lors de la sixième séance. Dans la situation en question, on retrouve, sur la feuille de gauche, une boîte en carton non transparente contenant 6 jetons et un autre sous-ensemble de 4 jetons et, sur la feuille de droite, deux sous-ensembles de 2 et 8 jetons respectivement. Ces objets concrets sont accompagnés par les écritures respectives. Le signe = ayant été ajouté entre les différents termes, Mathieu doit calculer le nombre de jetons dans la boîte. Après réflexion, Mathieu propose sa solution : 4 jetons. "*Il y en a 4 dans la boîte, parce que j'ai calculé, et j'arrive à 4 + 4, 8.*" La démarche de Mathieu laisse donc entrevoir ici qu'il a ignoré le sous-ensemble de 2 jetons et qu'il vient de transformer l'équation en une structure "a + b = c".

D'ailleurs, Mathieu utilise exactement la même procédure à l'occasion de la dernière séance, lorsqu'il doit compléter, à partir de l'écriture seulement, l'équation "5 + __ = 2 + 8". Cette fois-ci aussi, il ignore le sous-ensemble de 2 et transforme l'équation en "5 + __ = 8". Il est donc fort probable que l'erreur n'est due, ni à un hasard, ni à une inattention.

Une dernière forme de cette erreur se produit au cours de la sixième séance, alors que Mathieu doit compléter, à partir de l'écriture uniquement, l'équation "3 + 4 + 2 = 6 + __". Il propose 13 comme réponse initiale. "*En tout, il y en a 13, c'est ce que j'ai compté ici. (…) Si je l'avais calculé, et s'il y avait eu un = ici (montre le dernier +, après le 6), ce serait 13.* Même si Mathieu commet ici une erreur de calcul, on peut constater qu'il essaie une fois de plus de transformer l'équation en une structure "a + b = c".

2.1.2. Lecture à l'envers

Occasionnellement, surtout durant les premières séances, Mathieu utilise la lecture de droite à gauche pour transformer une égalité en une structure "a + b = c". Deux raisons l'y incitent. Ainsi, lorsqu'il doit résoudre, à partir de l'écriture symbolique uniquement, l'équation "7 = 2 + __", Mathieu essaie d'abord d'inscrire la somme des nombres 7 et 2. Par la suite, c'est la lecture à l'envers qui lui semble être la stratégie la plus adéquate. "*Est-ce que je peux lire aussi dans l'autre sens (de droite à gauche*) ?". Questionné sur les raisons qui l'incitent à inverser le sens de la lecture, Mathieu fait explicitement référence à une transformation en une structure a + b = c. "*On met toujours le calcul au début, et après le résultat.*" On peut donc constater qu'il y a un réel manque de compréhension de la situation, et que c'est ce manque qui incite Mathieu à lire l'égalité de droite à gauche.

En même temps, cet incident constitue la seule fois où Mathieu a recours à la lecture à l'envers, parce qu'il a des difficultés de compréhension. Dans toutes les autres situations, il lit de droite à gauche, mais accepte également la forme "a = b + c". Ainsi, dans le cadre de la deuxième séance, le travail porte sur l'égalité "9 = 5 + 4". Mathieu utilise d'abord une lecture à l'envers, mais accepte également la lecture de gauche à droite : "*Peu importe comment c'est tourné, c'est toujours la même chose.*"

Reste à souligner que l'explication que fournit Mathieu est très semblable à cet exemple dans toutes les autres situations qu'il lit de droite à gauche, puisqu'il accepte à chaque fois la forme "a = b + c".

2.1.3. Même expression des deux côtés du signe =

Une troisième forme du retour en arrière vers l'ancienne conception – obtenir exactement les mêmes expressions des deux côtés du signe = – est plus rare. Rappelons dans ce cadre qu'un certain nombre d'enfants avait accepté lors du prétest l'égalité "5 = 5", sur la base que les mêmes nombres étaient présents des deux côtés du signe =.

Chez Mathieu, cette forme n'apparaît qu'une seule fois au cours de toute la séquence d'enseignement : au moment où nous abordons avec lui les situations qui traduisent la commutativité de l'addition, il est confronté à une situation concrète de comparaison qui représente l'équation "4 + 6 = 6 + __" ainsi que sa représentation symbolique. Mathieu remarque immédiatement que le nombre qui manque est le 4, mais il a des difficultés avec la forme "4 + 6 = 6 + 4". "*Il faut mettre le 4 (dans 6 + 4) en avant quand même. Si tu veux que ce soit la même chose qu'ici (montre le carton 4 + 6), il faut que le 4 soit en avant.*" Immédiatement après, Mathieu relativise cependant ses propos : "*Ainsi (4 + 6 = 6 + 4), ça ne fait rien non plus, parce que ça donne la même quantité. Mais si tu veux avoir la même chose, il faut mettre le 4 en avant*." Mathieu, tout en acceptant la forme "4 + 6 = 6 + 4", essaie de placer exactement les mêmes expressions des deux côtés du signe =.

2.2. Particularités

Dans la section suivante, nous allons décrire en deux étapes les particularités de l'erreur qui consiste à transformer une égalité en une structure "a + b = c".

- Elle apparaît surtout face à des situations qui sont nouvelles pour l'élève.
- La fréquence de l'erreur tend à diminuer vers la fin de la séquence.

2.2.1. Apparition de l'erreur dans des situations nouvelles

Mathieu retourne surtout à une conception du signe = comme opérateur, telle que nous venons de le décrire, lorsqu'il est en face d'une structure que nous n'avons pas vue comme telle au cours de la séquence. C'est le cas par exemple dans la première situation que nous avons décrite. Rappelons que Mathieu s'y trouve face à 9 jetons, qui sont séparés en deux sous-ensembles de 5 et 4 éléments. Lorsqu'il s'agit d'écrire l'égalité, Mathieu insiste pour la transformer de manière à obtenir une structure "a + b = c".

Or, la situation que Mathieu avait à travailler occupe une place spéciale à l'intérieur de la séquence d'enseignement. En effet, il s'agit de la première fois que nous avons traité une structure "a = b + c" dans le cadre d'une situation inclusive.

Alors que les situations précédentes présentaient bel et bien des situations concrètes de structure "a = b + c", ainsi que les égalités correspondantes, elles le faisaient toujours dans le cadre d'une comparaison d'un ensemble à une réunion de deux sous-ensembles. Dans cette situation cependant, apparaît pour la première fois une activité qui fait intervenir un fractionnement d'un ensemble en deux sous-ensembles distincts. C'est donc uniquement face à cette situation nouvelle, et non par rapport à celles qu'il connaît déjà, que Mathieu retourne à son ancienne conception du signe = comme opérateur. D'ailleurs, après notre intervention, Mathieu ne répétera plus cette erreur pour ce type précis de situation.

Le deuxième exemple d'erreur que nous avons décrit fait également intervenir une situation nouvelle pour Mathieu. Rappelons que, face à l'écriture "7 = 2 + __", Mathieu essaie d'abord d'inscrire la somme des nombres 7 et 2 à l'endroit de l'inconnue. Par la suite, il tente de lire l'équation de droite à gauche pour la résoudre. La situation est particulière en ce sens que Mathieu est amené pour la première fois à compléter une équation de structure "a = b + c" en se référant à l'écriture seulement, alors que, précédemment, les équations de ce type ont à chaque fois été accompagnées d'une représentation concrète. C'est donc la présence d'une situation nouvelle qui pose problème à Mathieu et qui l'incite à retourner vers une conception du signe = comme opérateur.

2.2.2. Diminution de la fréquence de l'erreur

Au fur et à mesure que la séquence d'enseignement progresse, Mathieu retourne de moins en moins à l'ancienne conception du signe =. S'il y a recours fréquemment lors des premières séances d'enseignement, alors que le nouveau sens attribué au signe = est encore très fragile, le phénomène ne se manifeste pratiquement plus lors des dernières séances.

Le post-test, effectué une dizaine de jours après la dernière intervention, constitue cependant une exception à cette tendance. En effet, Mathieu y régresse dans plusieurs situations, et une conception du signe = comme opérateur l'empêche de résoudre un certain nombre de situations.

2.3. Compréhension vers la fin de la séquence

À partir de la quatrième séance surtout, Mathieu fait preuve d'une compréhension plus adéquate. A l'aide de différents exemples, nous allons essayer de décrire quels éléments peuvent justifier ce constat.

Un premier événement qui en témoigne se situe à la quatrième séance, au cours de laquelle des équations avec une inconnue, du type "a = b + c", ont été travaillées. Vers la fin de cette séance, Mathieu nous demande de compléter l'équation suivante : "10 + 10 = __". Afin de vérifier la signification que Mathieu attribue au signe =, nous lui avons proposé la solution suivante : "10 + 10 = 15 + 5". La première réaction de Mathieu indique un refus : "*Ce n'est pas correct. Tu sais, je connais le calcul (écrit 20 derrière le signe =)*". Ce n'est qu'après lui avoir demandé pourquoi on ne peut pas écrire "10 + 10 = 15 + 5" que celui-ci se prononce sur la solution que nous lui avons proposée : "*Cela fonctionne aussi. Ça donne 20 aussi (compte à haute voix de 15 jusqu'à 20)*".

Dans ce cas, Mathieu attribue donc clairement au signe = la qualité d'un indicateur d'une relation d'équivalence. Sa réaction est d'autant plus remarquable qu'à ce moment de l'expérimentation, nous n'avions pas encore travaillé les égalités de structure "a + b = c + d". Ayant appris à travailler avec des structures "a + b = c" et "a = b + c", Mathieu a donc pu accepter l'égalité "10 + 10 = 15 + 5".

Un autre indice se révèle lors de la cinquième séance d'enseignement : Mathieu doit décider, à partir d'une situation concrète de type comparaison et de l'écriture, si on peut mettre un signe = entre "1 + 7" et "3 + 4". Après avoir transformé l'égalité en "1 + 7 = 4 + 4", nous demandons à Mathieu s'il aurait également été possible de retirer un élément d'un ensemble. Mathieu nous propose alors une soustraction et transforme l'égalité en "8 – 1 = 4 + 3". Le fait d'accepter une soustraction est donc un autre indice qu'il considère désormais le signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence.

Finalement, au cours de la dernière activité de la séquence d'enseignement, nous demandons à Mathieu d'évaluer l'égalité "5 + 4 = 6 + 3 = 1 + 8". Après quelques hésitations initiales dues à des erreurs de calculs, Mathieu accepte finalement cette égalité *: "6 + 3, ça fait la même chose qu'ici (5 + 4), alors il y a la même chose.*" Suite à notre question, si on peut également rajouter "= 1 + 8", la réponse que Mathieu nous donne est la suivante : "*On peut le faire, parce qu'il y a toujours la même quantité.*" Mathieu conçoit le signe = donc nécessairement comme un indicateur d'une relation d'équivalence.

ÉLÉMENTS FAVORISANT LA PERFORMANCE DE MATHIEU

Deux éléments semblent avoir favorisé les progrès importants réalisés par Mathieu au cours de la séquence d'enseignement. D'une part, celui-ci est, dès le départ, en mesure d'établir le lien entre la situation concrète et l'écriture, et d'autre part, il a recours à des stratégies très variées lorsque nous lui demandons de résoudre les différentes activités.

Dans une première partie de cette section, nous allons décrire comment et jusqu'à quel point Mathieu réussit à établir un lien entre la représentation concrète et symbolique d'une égalité. Nous allons également tenter d'expliquer en quoi la capacité d'établir ce lien a pu aider Mathieu dans sa compréhension des relations d'équivalence et d'égalité.

La seconde partie s'intéressera plus spécifiquement aux stratégies que Mathieu utilise pour résoudre les problèmes additifs. Nous allons notamment voir que Mathieu se distingue surtout par le développement d'une grande diversité de stratégies.

1. Lien concret-écriture

Une des caractéristiques de Mathieu est qu'il a établi un lien entre la situation concrète, représentée par des jetons, et l'équation qui l'accompagne. Pourtant, l'établissement de ce lien ne va pas de soi. Au début de la séance, Mathieu ne réussit d'ailleurs pas à le faire. L'analyse des données nous a aussi révélé que Mathieu a plus de facilité à relier l'équation à une situation concrète lorsque celle-ci est représentée sous forme d'une comparaison. Par contre, il éprouve des difficultés plus importantes face à des situations inclusives. Finalement, la capacité de gérer simultanément la représentation concrète et l'équation qui l'accompagne est une des caractéristiques qui distingue Mathieu comme élève fort.

1.1. Absence de lien au début de la séquence d'enseignement

Tout au début de la séquence d'enseignement, avant l'explication de la signification du signe =, Mathieu ne réussit pas encore à établir un lien cohérent entre une égalité et sa représentation concrète. La première situation de la séquence confronte Mathieu avec deux sous-ensembles de 5 et 3 jetons, représentés à sa gauche, et d'un ensemble de 8 jetons, à sa droite. Mathieu doit décider s'il peut mettre un signe = entre "5 + 3" et "8", représentés par des cartons sous la situation concrète.

Au départ, Mathieu trouve la solution, puisqu'il affirme qu'on peut mettre un signe =. Par contre, son explication traduit ses difficultés d'établir un lien cohérent entre l'égalité et la situation représentée : "*Ici (montre les deux sous-ensembles de 5 et 3 sur sa gauche), c'est un calcul. Et ici (montre les 8 jetons sur sa droite), c'est le résultat, alors on peut mettre le signe =*".

Mathieu essaie donc de justifier la mise en place du signe = en s'appuyant sur un schéma question–réponse, sans directement tenir compte de la présence de la même quantité de jetons des deux côtés. Par contre, un peu plus tard et toujours en travaillant la même situation, l'explication de Mathieu correspond davantage à la situation concrète. Lorsque nous lui demandons une nouvelle fois ce que le signe = signifie dans cette situation, Mathieu relève la présence de la même quantité des deux côtés. "*C'est la même chose, il y en a 5 et 3 (montre les jetons sur sa gauche), et (…) c'est la même chose que 8 (montre jetons sur sa droite)*". Mathieu semble donc avoir réalisé quelques progrès en début de séquence en établissant un lien entre une situation concrète et l'équation qui le représente.

1.2. Relative facilité de relier une situation de comparaison à l'écriture correspondante

Dès le début de l'explication de la signification du signe =, Mathieu comprend facilement le lien entre la situation concrète et l'égalité qui la représente. Ainsi, dans des situations de comparaison, Mathieu s'appuie sur la présence de la même quantité des deux côtés du signe = dans l'écriture et dans les deux ensembles comparés dans la situation concrète. Ce phénomène se produit dès que nous lui expliquons la signification du signe = dans le cadre de la première séance, et se répète de manière cohérente tout au long de notre travail.

Pour illustrer la facilité avec laquelle Mathieu établit le lien entre une situation concrète et une équation dans ce type de situation, citons les commentaires de Mathieu, lorsqu'il est amené à justifier pourquoi il peut mettre un signe = entre "9" et "4 + 5", représentés sous forme de comparaison et de manière symbolique : Mathieu réunit et sépare de nouveau les deux sous-ensembles de 4 et 5 jetons, à sa droite. "*Ici, il y en a 9, et ici il y en a 9 aussi (en montrant les jetons).*" La mise en place d'un signe = est donc justifiée en prenant appui sur la représentation concrète.

L'aisance avec laquelle Mathieu établit le lien entre une écriture formelle et une situation comparative se manifeste également lorsqu'il doit lui-même inventer un exemple de structure "a + b = c + d", avec une inconnue. Cette équation doit être représentée concrètement, l'inconnue prenant la forme d'une boîte en carton non transparente, dans laquelle Mathieu doit mettre le nombre correct de jetons. Mathieu choisit de traiter l'équation "4 + 6 = 2 + __". La représentation concrète qu'il génère à partir de cette équation est une situation de comparaison, et dans la boîte en carton se trouvent 8 jetons, ce qui est cohérent avec l'équation posée. Ici encore, Mathieu réussit à établir clairement un lien entre une équation et une situation concrète de comparaison.

Finalement, si Mathieu relie facilement une situation concrète à une égalité, il se heurte dans certaines situations à des difficultés. Tel est par exemple le cas, lorsqu'il doit déterminer si la mise en place du signe = est appropriée dans l'écriture "5 + 4 __ 6 + 3". En effet, après avoir déterminé qu'on peut mettre le signe =, Mathieu tente de justifier sa réponse à l'aide du matériel concret. Cependant, la représentation qu'il choisit au départ ne correspond pas à l'égalité. En effet, il met deux ensembles de 5 et 6 jetons à sa droite, et a, par la suite de la difficulté à cerner son erreur. Comme cette erreur est cependant isolée, on peut penser qu'elle est attribuable en partie à de l'inattention.

1.3. Établissement du lien dans des situations d'inclusion

En général, Mathieu éprouve plus de difficultés à établir un lien cohérent entre une égalité et une situation concrète lorsqu'il doit traiter des situations représentées sous forme d'une inclusion, surtout lorsqu'il doit expliquer que le tout représente la même quantité que l'ensemble des parties dans ce type de situations. C'est ce que nous allons voir dans les paragraphes suivants.

Lors de la troisième séance, Mathieu se trouve en face d'un ensemble de 5 jetons et d'un sac transparent vide. Il doit décider combien de jetons il doit mettre dans le sac, si 5, plus le sac, représente la même quantité que 8. Alors que Mathieu détermine aisément qu'il faut mettre 3 jetons dans le sac, son explication est incohérente : Mathieu n'est pas en mesure de justifier son action par le fait que la même quantité est représentée par les expressions "8" et "5 + 3". "*Il n'y a rien qui est pareil, parce qu'ici, il y en a 5 (montre le sous-ensemble de 5), et ici, il y en a 3 (montre le sac avec les 3 jetons)*." Pour Mathieu, l'égalité "5 + 3 = 8" semble donc être correcte, parce que 8 est la réponse à 5 + 3, et non parce que les deux expressions représentent la même quantité.

Mathieu est également confronté à des difficultés lors de la quatrième séance, alors qu'il doit compléter l'équation "4 + __ = 9". Celle-ci est présente sous sa forme écrite et concrètement de façon inclusive. Dans la représentation concrète, les 5 jetons, correspondant à l'inconnue, sont contenus dans une boîte en carton non transparente. Mathieu réussit d'abord à répondre correctement à la question combien de jetons la boîte doit contenir, si 4, plus les jetons contenus dans la boîte, représentent la même quantité que 9.

Lorsque nous demandons à Mathieu de nous montrer les jetons représentés par le "4" et le "5" dans l'égalité, il les identifie facilement en pointant respectivement le sous-ensemble de 4 objets et la boîte en carton. Cependant, Mathieu n'est pas en mesure de montrer que les jetons sont représentés par le "9" dans la situation concrète : il montre le 9 dans l'égalité, mais ne pointe pas d'objets concrets.

> "Il n'y a pas 9. Il y en aurait 9, mais uniquement si on en avait mis 9 de côté (Mathieu met un ensemble de 9 jetons comme ensemble de référence. Il transforme donc la situation inclusive en une comparaison). Mais ces 9 là (en montrant l'égalité), ils ne sont pas là."

Manifestement, Mathieu ne comprend donc pas que, dans une situation inclusive comme celle-ci, la somme représente le total des deux sous-ensembles présents.

Un peu plus tard cependant, une situation analogue ne pose plus le même genre de difficultés à Mathieu. En effet, après avoir résolu et représenté l'équation "__ + 3 = 9" sous forme inclusive, Mathieu montre les objets que les nombres contenus dans l'équation représentent.

Face à des situations inclusives de structure "a + b = c + d", Mathieu a beaucoup moins de difficultés à lier une égalité à la représentation concrète. Lors de la sixième séance, nous montrons à Mathieu deux sous-ensembles de 3 et 4 jetons. Par la suite, un jeton est transféré du sous-ensemble de 3 au sous-ensemble de 4, de manière à obtenir deux sous-ensembles de 2 et 5 éléments. Mathieu réussit à justifier correctement pourquoi on peut mettre le signe = entre "3 + 4" et "2 + 5" : "*On peut mettre le signe =, parce qu'au lieu d'enlever un jeton, tu l'as uniquement changé de côté" (Mathieu remet le jeton qui a été transféré dans l'ensemble initial et répète la transformation réalisée au début de l'activité).*

La désignation des différents jetons, représentés par les nombres contenus dans l'équation, ne pose également aucune difficulté à Mathieu. Pour soutenir son explication, Mathieu refait les transformations réalisées en début d'activité.

En ce qui concerne le lien entre une égalité et une situation concrète, il semble donc que ce sont surtout les situations inclusives qui génèrent des difficultés pour Mathieu. Ces difficultés peuvent provenir du fait qu'une situation de comparaison correspond exactement à l'écriture. Par exemple, lorsqu'on représente l'égalité 3 + 4 sous forme de comparaison, c'est-à-dire avec deux sous-ensembles de 3 et 4 objets à gauche et un sous-ensemble de 7 à droite, tous les chiffres présents dans l'égalité ont un ensemble correspondant dans la situation concrète. Or, tel n'est pas le cas dans une situation représentée sous forme inclusive. Dans ce cas de figure, le chiffre 7 désigne exactement les mêmes objets que les chiffres 3 et 4. 7 est alors le total des deux sous-ensembles présentés, mais n'est pas représenté par un ensemble distinct des deux sous-ensembles de 3 et 4.

1.4. Gestion simultanée de l'aspect concret et formel

Une des spécificités de Mathieu est sa facilité à gérer simultanément l'aspect concret et l'écriture. Ainsi, à différentes reprises, nous lui avons proposé des situations, accompagnées par leur représentation concrète, qui n'étaient pas des égalités, et qu'il devait transformer en égalité au niveau concret et formel.

Dès la première séance, lorsqu'il doit décider s'il peut mettre le signe = entre "3 + 2" et "6", présent sous forme d'une comparaison et de l'écriture "3 + 2 __ 6", il répond avec détermination par la négative. Mathieu transforme facilement cette situation en une équivalence : il enlève un jeton à l'ensemble de 6 jetons et remplace le 6 par un 5 dans l'écriture.

Cependant, l'explication de Mathieu pourquoi on ne pouvait pas mettre le signe = dans la situation initiale traduit encore une difficulté à établir un lien entre la situation concrète et l'écriture. En effet, cette explication n'est pas en fonction de la présence de la même quantité des deux côtés, au niveau concret : "*On ne peut pas mettre le signe =, parce que 2 + 3, ça ne donne pas 6*."

Une situation de même nature confirme, lors de la cinquième rencontre, l'aisance avec laquelle Mathieu traite simultanément l'écriture et la situation concrète : Mathieu est face à deux sous-ensembles de 7 et 1 jetons à sa gauche, et de deux sous-ensembles de 4 et 3 jetons à sa droite. Cette représentation concrète est accompagnée par des cartons sur lesquels sont inscrites les deux additions "7 + 1" et "4 + 3". Mathieu doit décider s'il peut mettre le signe = entre les deux cartons et, le cas échéant, modifier la situation de manière à ce qu'il puisse mettre un =.

Après quelques hésitations, ne sachant pas s'il faut enlever un élément aux sous-ensembles à sa droite ou s'il faut en ajouter un dans les sous-ensembles à sa gauche, Mathieu modifie la situation, au niveau concret et formel, afin de la transformer en "7 + 1 = 4 + 4". Afin de vérifier la compréhension de Mathieu, nous lui demandons s'il est possible de retirer un élément parmi les jetons sur sa gauche. La deuxième solution que Mathieu propose par la suite laisse entrevoir qu'il comprend parfaitement les relations d'équivalence. En effet, Mathieu a recours à une soustraction, qui n'a pas été abordée dans notre séquence d'enseignement, afin de transformer la situation, concrète et formelle, en une comparaison de structure "8 – 1 = 3 + 4".

> "On peut mettre le signe =, parce qu'on en a 3 (montre le sous-ensemble de 3 à sa droite), et avec ceux-ci (montre le sous-ensemble de 4 à sa droite), c'est 7, et ici (montre les 7 jetons qui restent après la soustraction effectuée à sa gauche), il y en a 7 aussi."

En ayant recours à un type de structure non traité précédemment dans la séquence, Mathieu fournit la preuve concrète de sa compréhension avancée des relations d'égalité et d'équivalence, ainsi que de sa capacité d'établir des liens entre une égalité et une situation concrète. Reste à rajouter que Mathieu a parfaitement maîtrisé les autres activités de ce type.

2. Utilisation de stratégies variées

Dans le cadre de cette section, nous allons décrire comment Mathieu a réalisé de bonnes performances tout au long de l'expérimentation didactique, grâce à différentes stratégies et surtout une grande variété de stratégies additives et soustractives. La plupart du temps, celles-ci sont de nature numérique et ce n'est que très rarement que Mathieu utilise spontanément le matériel concret mis à sa disposition.

2.1. Recours au total présent des deux côtés du signe =

Fréquemment, tout au long de notre séquence, Mathieu détermine le total présent des deux côtés du signe =. Cette stratégie est utilisée surtout lorsqu'il doit décider s'il peut mettre le signe = entre deux expressions ou entre deux collections. Ainsi, tout au début de la séquence, Mathieu a devant lui une situation comparative de structure "9 = 4 + 5", et il doit décider s'il peut mettre un = entre 9 et 4 + 5. Pour ce faire, il réunit les sous-ensembles de 4 et 5 en un ensemble de 9, et justifie la mise en place du signe = par la présence de la même quantité de jetons sur les deux feuilles. *Ici, on peut mettre le signe = parce qu'il y en a 9, si on les met ensemble, et c'est la même chose.* Cette justification fait donc référence à la fois au matériel concret et au niveau numérique.

Par ailleurs, Mathieu a recours au total présent des deux côtés lorsqu'il doit déterminer s'il peut mettre le signe = dans une structure de type "a + b = c + d", présentée dans une situation de comparaison. Face à la tâche "1 + 7 __ 4 + 3", Mathieu dénombre le total de jetons présents des deux côtés pour arriver à la conclusion qu'il ne peut pas mettre un = entre ces expressions. La même stratégie est utilisée pour les autres tâches de ce type.

2.2. Manipulation du matériel concret

Si, au début, Mathieu ne manipule pas spontanément le matériel, il l'utilise davantage après que nous l'avons encouragé à justifier ces propos à l'aide du matériel, méthode qui s'avère efficace dans la plupart des cas.

Au début de la séquence d'intervention, Mathieu se réfère lui-même au matériel, pour justifier pourquoi on peut insérer le signe = dans l'écriture "7 __ 3 + 4", représentée concrètement dans une structure de comparaison. En effet, Mathieu sépare l'ensemble de 7 objets en deux sous-ensembles de 3 et 4 et base sa justification sur la présence des mêmes sous-ensembles des deux côtés.

Cependant, alors que Mathieu comprend le principe sous-jacent à cette stratégie, il n'en voit pas toujours l'utilité pour résoudre différentes activités. Ainsi, lorsqu'il doit travailler une équation de structure "5 + __ = 7", représentée sous forme d'une structure de comparaison, il ne sépare l'ensemble de 7 en deux sous-ensembles de 2 et 5 qu'après intervention de notre part. "*On peut le faire comme ça aussi. Je les ai juste changés un peu, mais c'est encore la même chose*." Par la suite, il modifie encore la disposition des objets, pour les séparer en 3 ensembles de 3, 2 et 2 éléments respectivement. "*On peut le faire comme ça aussi.*" Nous pouvons donc affirmer ici que Mathieu a compris que le changement de la disposition des objets n'affecte pas la quantité représentée.

Malgré cette évolution, Mathieu éprouve encore des difficultés à se servir efficacement de la stratégie de manipulation des objets afin d'obtenir les mêmes sous-ensembles des deux côtés du signe =. Dans la situation qui suit celle décrite précédemment, il travaille l'équation "9 = __ + 2", représentée sous sa forme écrite et concrètement par une structure de comparaison. Mathieu ayant résolu correctement cette activité, nous lui demandons de justifier sa réponse à l'aide de matériel concret. Il ne sépare pas les 9 objets en deux sous-ensembles de 7 et 2, mais les divise en 5 et 4 objets. "*Il y en a 4 et 5 ici. Si je les mets de nouveau ensemble, il y en a la même quantité que neuf*". Mathieu comprend donc bien que la quantité représentée ne change pas. Par contre, il ne voit probablement pas encore comment il peut se servir de la manipulation des jetons pour résoudre des activités de ce type.

Au cours de la quatrième séance d'enseignement, Mathieu sépare, après intervention de notre part, un ensemble de 10 en deux sous-ensembles de 3 et 7 pour compléter l'équation "10 = __ + 3", présente sous forme écrite et représentée selon une structure de comparaison. Ici encore, Mathieu manipule le matériel, mais c'est davantage pour justifier sa réponse que pour trouver l'inconnue dans l'équation en question.

Ce n'est qu'à partir de la fin de la quatrième séance que Mathieu commence à redistribuer, spontanément et sans intervention de notre part, les objets à l'intérieur des différents sous-ensembles, et ceci dès qu'il est confronté à des structures "a + b = c + d". Ainsi, lorsqu'il doit décider si on peut mettre un = entre "6 + 2" et "5 + 3", représenté de manière concrète par une comparaison et sous forme écrite, Mathieu redistribue les objets sur la feuille de gauche (6 + 2) de manière à obtenir deux sous-ensembles de 3 et 5 objets respectivement.

Par ailleurs, Mathieu n'a pas uniquement recours à cette stratégie lorsqu'il s'agit de traiter des situations représentées sous forme d'une comparaison. Lors de la sixième séance, il doit décider s'il peut mettre le signe = entre "3 + 4" et "2 + 5", égalité représentée sous forme d'une redistribution des jetons à l'intérieur de deux sous-ensembles. "*On peut mettre le signe =, parce que, au lieu d'enlever un jeton, tu l'as uniquement changé de côté (Mathieu remet le jeton du sous-ensemble de 5 dans le sous-ensemble de 2 jetons, recréant ainsi la situation initiale)*". C'est donc la conservation de la quantité totale de jetons qui permet à Mathieu d'affirmer qu'on peut mettre le signe =, et il justifie son choix en effectuant l'opération inverse à celle réalisée au début de l'activité.

2.3. Double dénombrement et stratégies additives simples

De nombreuses situations, qui impliquent la résolution d'équations avec une inconnue, incitent Mathieu à recourir au double dénombrement et à l'addition, et ce dès l'introduction de ce type de tâches. Ces deux stratégies sont d'ailleurs étroitement liées, comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants.

La résolution d'une équation par un double dénombrement peut être illustrée à l'aide d'une tâche demandée à Mathieu lors de la troisième séance. Mathieu doit décider combien de jetons il faut ajouter à un ensemble de 5 pour en avoir autant que dans un ensemble de 8 objets, représenté à côté. C'est en ayant recours à un double dénombrement sur ses doigts, tout en comptant à voix haute que Mathieu réussit à trouver le nombre de jetons manquants. Cependant, ici, comme dans plusieurs autres situations, on peut se poser la question de savoir si Mathieu ne connaît pas l'addition par cœur. En effet, Mathieu trouve très rapidement l'inconnue, et ce n'est que lorsque nous lui demandons d'expliquer sa réponse qu'il se sert de ses doigts.

D'ailleurs, Mathieu ne se sert pas uniquement des additions apprises par cœur dans des situations du type "a + b = c", mais également dans des situations plus complexes, comme en témoigne une situation survenue lors de la sixième séance. Face à l'équation "6 + 2 = 5 + __", représentée concrètement sous forme de comparaison, Mathieu fournit immédiatement une réponse correcte. "*Il suffit que je calcule dans ma tête. Parce que 5 + 3, alors j'ai la même quantité qu'ici (montre les deux sous-ensembles de 6 et 2)*".

Cependant, Mathieu ne connaît pas toutes les additions par cœur, et dans certaines situations, la stratégie de double dénombrement est utilisée pour la résolution de l'équation en tant que telle. C'est d'ailleurs dans ces situations, alors qu'il ne sait pas par cœur l'addition demandée, que le double dénombrement peut lui poser problème. Ainsi, à la troisième séance, Mathieu est en face d'une situation de comparaison de structure "3 + __ = 10", représentée concrètement et symboliquement devant lui, avec le nombre de jetons correspondant à l'inconnue dans une boîte en carton non transparente. La réponse fournie par Mathieu (d'abord "3 + 6 = 10", et ensuite "3 + 8 = 10") résulte d'une erreur de dénombrement.

À côté des stratégies additives faisant appel au double dénombrement et à des stratégies additives simples, certaines situations incitent Mathieu à recourir à des stratégies additives plus évoluées. Ainsi, lors de la cinquième séance, Mathieu se sert d'une redistribution des nombres pour déterminer si on peut mettre un signe = entre "3 + 1 + 2" et "4 + 2", ce qui témoigne d'une compréhension approfondie de l'addition. "*On peut mettre le signe =, parce que 3 + 1, c'est 4, et c'est + 2, de chaque côté. Tu as juste écrit différemment ceci (3 + 1) pour que ça donne 4*."

2.4. Maîtrise de la commutativité de l'addition

Si Mathieu se sert fréquemment de stratégies additives pour compléter différentes équations, il possède également une bonne maîtrise des propriétés de l'addition, et notamment de la commutativité. Comme nous allons le voir dans cette section, il réussit à résoudre assez facilement les activités correspondantes, malgré quelques difficultés de départ.

Dans le cadre de la première activité qui traite de la commutativité de l'addition, Mathieu doit compléter l'équation "4 + 5 = 5 + __". Cette équation est présentée sous forme écrite et accompagnée d'une représentation concrète sous forme de comparaison, dans laquelle l'inconnue correspond à une boîte en carton non transparente. Mathieu réussit immédiatement à déterminer le nombre de jetons dans la boîte, et sa justification nous permet de conclure qu'il s'est servi de la commutativité de l'addition : "*C'est parce que j'ai copié ici (montre 4 + 5 à gauche du signe =).*" Rappelons cependant que l'explication fournie par Mathieu permet de douter de la conception qu'il s'est faite du signe =, puisqu'il insiste tout de suite que les chiffres soient présentés dans la même suite des deux côtés du signe = : "*J'ai fait une petite erreur. Le 4 doit être en avant quand même.*" Deux explications sont possibles : d'une part, il peut s'agir d'un retour vers une autre conception du signe =, et, d'autre part, cette remarque peut indiquer que la compréhension de la commutativité de l'addition est fragile.

Dans la suite de la séance, rien ne laisse cependant croire que c'est la compréhension de la commutativité qui soit en cause. Lorsque Mathieu doit compléter des équations qui contiennent des nombres qui lui sont probablement inconnus, c'est clairement le recours à la commutativité qui permet à Mathieu de déterminer l'inconnue. Face à l'équation "__ + 15 = 15 + 13", présentée sous forme écrite et représentée concrètement sous forme de comparaison, avec une boîte en carton comme inconnue, Mathieu trouve immédiatement le nombre d'objets dans la boîte. La rapidité de la réponse nous permet donc de conclure que c'est la commutativité, et non un recours au total présent des deux côtés, qui a permis à Mathieu de déterminer la valeur de l'inconnue.

Ce constat est finalement corroboré alors que Mathieu doit compléter différentes équations qui traduisent la commutativité, à partir de leur écriture seulement. En effet, Mathieu réagit de la même façon que dans l'activité décrite précédemment et se sert clairement de la commutativité pour la résolution.

RÉGRESSION DANS LE CADRE DU POST-TEST

Dans le cadre du post-test, Mathieu démontre d'importants progrès par rapport au prétest, mais éprouve des difficultés pour retrouver le même niveau de performance que lors de la dernière séance d'enseignement. En général, il continue à concevoir le signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence. Contrairement au prétest, il arrive à résoudre correctement toutes les activités qui lui sont proposées. Cependant, à plusieurs reprises, Mathieu se heurte au sens de la lecture d'une égalité.

Ainsi, lors de l'évaluation de l'égalité "8 = 4 + 4", Mathieu arrive à justifier correctement pourquoi on peut mettre le signe =, mais il lit l'égalité de droite à gauche. L'explication qu'il fournit peut surprendre : "*Il faut toujours commencer de ce côté (à droite), du côté de la fenêtre.*" Cette attitude ne semble pas être en relation avec une conception erronée du signe =. Afin de vérifier si Mathieu conçoit le signe = comme opérateur, nous lui demandons de lire l'égalité "6 + 3 = 9", avec comme résultat qu'il la lit également de droite à gauche. ("9 = 6 + 3"). Le souhait d'obtenir une structure "a + b = c" ne semble donc pas constituer l'élément susceptible de déclencher des difficultés chez Mathieu.

D'ailleurs, en fournissant une explication par la suite, Mathieu commence à douter de la justesse de ses propos :

> "C'est toujours dans le même sens, il faut commencer du côté de la fenêtre. Parce que chez nous, la fenêtre est de l'autre côté, mais on lit quand même dans l'autre sens. Attends… (tourne l'égalité de côté). Non, ce serait mieux comme ça : 6 + 3 = 9."

Mathieu semble donc se rendre compte que le sens de la lecture ne peut pas dépendre du côté duquel se situe la fenêtre dans la salle. Cependant, ceci n'évite pas qu'il répète encore une fois la même erreur un peu plus tard. Cette fois-ci, l'explication de Mathieu donne une indication de l'origine de cette erreur : "*Mon enseignante m'a dit qu'on commence toujours à lire du côté de la fenêtre*." Cette astuce, fournie par l'enseignante, a ostensiblement induit Mathieu en erreur.

La seule autre erreur que Mathieu fait lors du post-test marque un retour en arrière sur son ancienne conception du signe =. Lorsqu'il doit résoudre l'équation "9 = __ + 2", Mathieu demande s'il faut qu'il obtienne 2 ou 9. Il n'est donc plus tout à fait certain de la signification à attribuer aux différents symboles impliqués. Toutefois, il réussit par la suite à trouver lui-même la bonne solution, sans intervention de notre part.

CHAPITRE 6
DISCUSSION DES RÉSULTATS

COMPRÉHENSION GÉNÉRALISÉE DU SIGNE = COMME OPÉRATEUR LORS DU PRÉTEST

La présente section est constituée de trois parties distinctes. D'une part, nous allons montrer que, si la compréhension du signe = comme opérateur est généralisée chez les enfants avec lesquels nous avons travaillé, cette erreur est présente à différents degrés. D'autre part, l'ampleur des difficultés que les enfants rencontrent lorsqu'ils ont à traiter des structures additives non conventionnelles varie d'un participant à l'autre. Finalement, l'absence d'enseignement du signe = dans la classe et le type d'opérations présentées dans les manuels de mathématiques sont des facteurs qui sont mentionnés par les enfants et qui pourraient contribuer à leurs difficultés.

1. Différents degrés de compréhension

Un premier constat s'impose : tous les enfants avec lesquels nous avons travaillé conçoivent essentiellement le signe = comme un opérateur lors du prétest. Ce phénomène ne se limite pas uniquement aux enfants qui ont été sélectionnés pour participer à la séquence d'enseignement. Parmi les onze enfants de la classe auxquels nous avons soumis le prétest, aucun ne considérait de manière cohérente, à travers toutes les activités, le signe = comme un indicateur d'une relation d'équivalence. Les difficultés décrites pour les élèves ayant participé à notre séquence d'enseignement semblent donc être généralisées à l'ensemble de la classe.

Si tous les enfants éprouvent des difficultés à concevoir le signe = comme un indicateur d'une relation d'équivalence, l'étendue de cette mauvaise compréhension varie cependant. Comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants, cette conception est généralisée chez Caroline, mais beaucoup plus nuancée chez Mélissa, et surtout chez Mathieu.

Au prétest, Caroline n'entretient aucun doute quant à la justesse de sa conception du signe = comme opérateur. L'explication que Caroline fournit confirme clairement sa conception erronée : "*Le signe =, c'est quand on calcule, si on a terminé [l'addition], on met le signe = et un autre nombre*." D'ailleurs, elle n'accepte aucune égalité qui dévie de la structure "a + b = c". Ainsi, elle modifie l'écriture de l'égalité "7 = 3 + 4" en "3 + 4 = 7" et transforme l'égalité "5 = 5" en "5 + 5 =__".

Mélissa est plus nuancée dans ses propos, et semble se rapporter à deux cadres de référence différents. D'une part, elle affirme que "*quand c'est égal, c'est la même chose*", et d'autre part, elle prétend qu'on place le signe = "*quand on met encore une autre lettre (chiffre) après*". Chez Mélissa, le premier cadre de référence correspondrait à un indicateur de relation d'équivalence et le deuxième à un opérateur. Cependant, en pratique, lorsque Mélissa doit évaluer différentes égalités, le signe = a clairement valeur d'un opérateur, puisqu'elle réfute les égalités de structure "a = b + c" et "a + b = c + d".

Par contre, deux éléments semblent indiquer que la compréhension comme opérateur est ancrée moins rigidement chez Mélissa. D'une part, celle-ci a recours à une lecture de droite à gauche de l'équation "7 = __+ 5" lorsqu'elle la complète correctement, signifiant donc que, dans certaines situations, elle accepte des égalités de cette structure. D'autre part, elle semble douter de sa conception lorsqu'elle doit évaluer l'égalité "5 = 5". En effet, Mélissa considère cette égalité comme étant "*un peu mieux*" que celles de structure "a = b + c". Nous pouvons donc supposer que la conception du signe = comme opérateur est ancrée moins fortement que chez Caroline.

Mathieu, pour sa part, a déjà réussi à développer une compréhension plus évoluée dans certaines situations. Certes, dans la plupart des tâches proposées, Mathieu utilise le signe = comme opérateur. Ainsi, il réfute les égalités "7 = 3 + 4" et "3 + 4 = 1 + 6" en se basant sur le fait qu'elles ne correspondent pas à une structure "a + b = c". Cependant, autant dans son explication du signe = que dans l'évaluation de l'égalité "5 = 5", il devient apparent que cette conception erronée est moins fortement ancrée que chez les autres élèves. En effet, Mathieu explique que "*le signe =, on le met quand c'est la même chose*" et accepte l'égalité "5 = 5", en se basant sur la présence de la même quantité des deux côtés du signe =. Dans certaines situations, Mathieu est donc déjà en mesure de concevoir le signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence.

2. Incidences de la mauvaise compréhension du signe =

Les incidences d'une mauvaise compréhension du signe = sont différentes d'un enfant à l'autre. Nous avons pu constater que Caroline, qui a une conception très rigide du signe = comme opérateur, éprouve davantage de difficultés que Mélissa et Mathieu, dont la mauvaise conception du signe = est ancrée moins profondément.

Certes, tous les enfants qui conçoivent le signe = essentiellement comme opérateur n'arrivent pas à compléter une équation comme "6 + 2 = __ + 3", en raison de leur mauvaise compréhension. Tous les enfants essaient dans ce cadre de ramener d'une manière ou d'une autre l'équation à une structure "a + b = c". Cette transformation leur permet d'être cohérents avec une conception du signe = comme opérateur, mais ne permet évidemment pas de déterminer l'inconnue. Une compréhension déficiente du signe = n'empêche pourtant aucun de nos participants de compléter correctement une équation de structure "a + b =__", puisque tous les enfants réussissent aisément cette tâche.

C'est lorsque les enfants doivent compléter les équations "7 + __ = 9" et "7 = __ + 5" que des différences notables apparaissent. En effet, Caroline, avec la conception la plus rigide, n'est pas en mesure de déterminer l'inconnue dans ces exemples. Elle n'est, par conséquent, pas capable de passer au-delà des structures additives qui lui ont été enseignées à l'école.

Mélissa et Mathieu, qui, rappelons-le, doutent dans certaines situations de la signification du signe =, sont plus performants lorsqu'ils doivent compléter ces mêmes équations. Les deux se servent de stratégies additives similaires pour compléter les deux équations. Cependant, lorsque nous leur demandons de lire "7 = 2 + 5", ils ont recours à une lecture de droite à gauche. S'ils acceptent donc de compléter l'équation, ils la transforment quand même en une structure "a + b = c", par une lecture à l'envers, en cohérence avec une conception du signe = comme opérateur.

Dans ce cadre, il est cependant difficile de déterminer à quels facteurs doivent être attribuées les difficultés observées chez Caroline et les meilleures performances réalisées par Mélissa et Mathieu. L'ampleur de la mauvaise compréhension du signe = pourrait jouer un rôle. Par ailleurs, l'hypothèse que c'est la maîtrise de différentes stratégies additives qui influence les performances de ces enfants est tout aussi plausible. En effet, dans "7 + __ = 9", c'est uniquement la place de l'inconnue qui a été modifiée par rapport aux activités réalisées en classe. De même, ce sont les enfants qui ont ramené, par une lecture à l'envers, l'équation "7 = __ + 5" à la même forme. Considérant ce constat, les difficultés des enfants pourraient également être attribuées à leur incapacité de s'adapter à une modification de la place de l'inconnue, qui relève davantage de la compréhension des structures additives que de celle du signe =.

3. Causes de la conception erronée du signe =

Il est impossible dans le cadre de cette recherche de déterminer exactement les causes qui amènent les enfants à se construire une conception du signe = comme opérateur. Cependant, certaines réponses des enfants lors du prétest et en début de séquence d'enseignement laissent entrevoir que des facteurs reliés à l'enseignement semblent jouer un rôle important.

C'est surtout Mélissa qui cite explicitement l'absence d'enseignement du signe =. Lorsque nous lui demandons ce que signifie ce signe, sa réponse laisse croire que ce signe n'a pas encore été traité en classe. "*Je ne le sais pas. On ne l'a pas encore appris*." Si cette réaction peut encore être expliquée par un oubli de la part de Mélissa, elle devient plus claire lors de la deuxième séance d'enseignement, après l'explication du signe =. "*Auparavant, je ne savais pas ce que signifiait le signe =. Parce que, quand j'ai calculé, l'enseignante a toujours dit 'égale', mais je ne savais pas ce que cela voulait dire. Je pensais que cela signifiait qu'il y a quelque chose qui suit*."

Caroline et Mathieu ne mentionnent pas aussi clairement l'absence d'enseignement du signe =. En réalité, une analyse des manuels employés en première année d'études au Luxembourg révèle qu'un enseignement explicite du signe = n'est prévu que lorsqu'il s'agit de comparer deux quantités : on demande aux enfants d'insérer les symboles "<", ">" ou "=" entre deux nombres. Par contre, d'autres égalités que celles qui correspondent à une structure "a = a" ne sont pas expliquées. D'ailleurs, l'enseignante nous a confirmé qu'elle n'a pas particulièrement insisté sur ce point non plus.

Ce sont Caroline et Mélissa qui apportent un autre élément qui peut avoir contribué aux difficultés des enfants. En début de séquence d'apprentissage, avant l'explication du signe =, Caroline se base sur le type d'activité présenté dans son manuel de mathématiques lorsqu'elle doit évaluer "8 = 5 + 3" : "*On ne peut pas mettre le signe =, parce que, dans notre livre, ça ne marche pas.*" Caroline semble donc déduire de la présentation d'égalités de structure "a + b = c" que cette forme est la seule acceptable.

Une des remarques de Mélissa semble d'ailleurs aller dans le même sens. Ainsi, lors de la première séance, avant l'explication du signe =, elle affirme "*qu'à l'école, on utilise le signe = pour dire combien ça fait*". Ici encore, le type d'activités que Mélissa rattache à l'utilisation du signe = semble influencer sa conception. En effet, une conception du signe = comme opérateur ne peut être maintenue de manière cohérente que dans des équations de structure "a + b = __".

Bien sûr, nous ne pouvons pas affirmer que la spécificité des manuels luxembourgeois, proposant presque exclusivement des équations de structure "a + b = __", est à l'origine de la mauvaise compréhension de Caroline et de Mélissa. Cependant, il est fort possible que cette particularité les ait renforcées dans leur conception erronée.

UN OBSTACLE COGNITIF IMPORTANT

Même si l'ensemble des enfants avec lesquels nous avons travaillé a réussi à cheminer tout au long de la séquence d'enseignement, l'apprentissage du signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence reste un puissant obstacle cognitif. Trois types d'observations, que nous allons expliciter dans cette section, nous permettent d'en arriver à ce constat. D'une part, après l'explication du signe = lors de la première séance, les enfants sont réticents à modifier leur conception initiale de ce signe. D'autre part, la compréhension du signe = dans un certain type de situation ne garantit pas que la signification attribuée à ce signe sera la même dans d'autres situations. Ainsi, le cheminement de tous les participants est parsemé de nombreux retours vers une conception du signe = comme opérateur. Finalement, une dizaine de jours seulement après la fin de la séquence d'enseignement, lors du post-test, deux des trois participants ont tendance, dans certains situations, à revenir à une conception du signe = comme opérateur.

1. Passage d'une signification du signe = à une autre

Tous les enfants, avec lesquels nous avons travaillé, se sont montrés réticents à attribuer une nouvelle signification au signe = lors de la première séance. Grâce à l'activité qui visait à expliquer ce signe, deux types de réactions ont pu être observés : tantôt les enfants ont mis en doute notre explication, tantôt ils ont transformé l'égalité en une structure "a + b = c" par une lecture à l'envers.

C'est Mélissa qui réagit le plus fortement lorsque nous lui expliquons que le signe = équivaut à un indicateur d'une relation d'équivalence. Elle met tout simplement en doute nos propos et persiste dans sa conception. "*Je ne pense pas que c'est comme tu le dis*."

Si les deux autres participants acceptent notre explication, ils maintiennent de manière plus subtile toutefois leur conception du signe = comme opérateur. Tant Mathieu que Caroline acceptent l'écriture "8 = 5 + 3", mais à condition de pouvoir lire l'égalité de droite à gauche. De cette manière, ils réussissent à la ramener à une structure qui reste cohérente avec une conception du signe = comme opérateur. La réaction de Caroline est particulièrement intéressante à cet égard. Contrairement à Mathieu, elle n'avait pas encore eu recours à cette stratégie lors du prétest. Ce n'est donc que lorsque nous avons essayé de lui expliquer que des égalités de structure "a = b + c" peuvent également être valables, qu'elle l'utilise pour la première fois.

Tous nos participants essaient donc, d'une façon ou d'une autre, de maintenir leur conception du signe = comme opérateur. Cette tendance diminuera assez rapidement, mais, comme nous allons le voir dans la section suivante, les enfants retournent de nombreuses fois vers une conception du signe = comme opérateur au cours de notre séquence d'apprentissage.

2. Retour vers une conception du signe = comme opérateur

L'acceptation du signe = comme opérateur dans certaines situations au début de la séquence d'apprentissage ne signifie pas que les enfants ont mis leur ancienne conception au rancart. Tous retournent, à différents moments, à une conception comme opérateur. Ce phénomène constitue un deuxième indice de la puissance de l'obstacle cognitif que constitue l'apprentissage du signe =. Dans cette section, nous allons voir que, chez tous les enfants, mais à des degrés différents, le retour se fait essentiellement sous deux formes : la lecture à l'envers et la transformation d'une égalité en une structure "a + b = c". Par la suite, nous allons montrer que les élèves qui ont bien réussi au cours de la séquence d'enseignement se caractérisent par le fait que ces erreurs diminuent au fur et à mesure qu'ils avancent.

2.1. Lecture à l'envers

Rappelons que la lecture à l'envers permet aux enfants d'accepter des égalités de structure "a = b + c", tout en restant cohérents avec une conception éventuelle du signe = comme opérateur. En effet, l'inversion du sens de la lecture dans ce type d'énoncé permet de ramener l'égalité à une structure de type "a + b = c".

Au cours de notre intervention, nous avons constaté que tous les enfants ont recours, à un moment donné, à une lecture à l'envers. De plus, nous avons pu identifier deux raisons qui justifient le recours à l'inversion du sens de lecture. D'abord, un certain nombre de réponses indiquent que les enfants ont une réelle difficulté à attribuer au signe = une signification d'indicateur d'une relation d'équivalence. Ensuite, il arrive que des enfants manifestent tout simplement leur inconfort envers certaines structures additives. Caroline, par exemple, explique lors de la deuxième séance la lecture à l'envers de l'égalité "7 = 3 + 4" de la manière suivante : "*On ne peut pas lire comme ça parce que, sinon, on pourrait croire qu'il y a un 7, un =, et le calcul seulement après*". Cette explication permet donc d'affirmer qu'une conception du signe = comme opérateur est à l'origine de ses propos. Chez Mathieu, une réelle incompréhension apparaît une seule fois, lorsqu'il doit compléter l'équation "7 = 2 + __". Ressentant des difficultés à résoudre l'activité, Mathieu inverse le sens de la lecture. D'ailleurs, une équation similaire pose le même type de difficultés à Mélissa, puisqu'elle ne réussit pas à compléter "9 = __ + 2", qu'elle considère comme étant une équation « à l'envers ».

Dans d'autres situations, l'inversion du sens de la lecture est motivée différemment par Mélissa. Il semble que ce soit plutôt le maintien d'une vieille habitude qui l'empêche de lire des égalités de structure "a = b + c". "*Je n'aime pas ça, lire comme ça, et si on le retournait, on pourrait mieux lire.*" Mathieu, pour sa part, affirme à plusieurs reprises qu'on pourrait lire une structure "a = b + c" de droite à gauche. Cependant, dans ces situations, il accepte également la lecture de gauche à droite. "*Peu importe comment c'est tourné, c'est toujours la même chose.*" Pour ces deux élèves, le recours à une lecture à l'envers n'implique donc pas automatiquement la présence d'une incompréhension sous-jacente du signe =.

2.2. Transformation de l'égalité en "a + b = c"

La transformation d'une égalité en une structure "a + b = c" est la deuxième stratégie qui permet aux enfants de rendre cohérentes différentes égalités avec une conception du signe = comme opérateur. Comme nous allons le voir dans cette section, cette stratégie est utilisée par tous les participants. Elle apparaît à la fois dans des situations de structure "a = b + c" et "a + b = c + d" et elle peut prendre des formes différentes.

Deux raisons différentes semblent motiver les enfants à transformer en "a + b = c" des égalités de structure "a = b + c". Surtout au début de la séquence d'enseignement, Mathieu et Caroline ont pour souci de mettre l'addition à gauche, avant le signe =. Ils se basent sur le fait que, selon eux, le calcul doit être situé avant le signe = pour justifier la transformation d'une égalité de structure "a = b + c" lorsqu'ils ont à évaluer celle-ci. Mélissa et Mathieu utilisent une deuxième variante de cette stratégie en complétant l'équation "7 = 2 + __". Les deux élèves, ne sachant initialement pas comment résoudre cette activité, proposent d'insérer un 9 à la place de l'inconnue. Face à cette difficulté, ils transforment donc l'égalité en "7 + 2 = __, ce qui leur permet de rester cohérents avec une conception du signe = comme opérateur.

La transformation d'une égalité de structure "a + b = c + d" en une structure de type "a + b = c" revêt trois formes différentes. Toutes ces formes ont en commun de permettre aux enfants de maintenir une conception du signe = comme opérateur. D'une part, les trois participants additionnent, à un moment donné, tous les nombres présents dans une structure " a + b = c + d". La stratégie de Mathieu, qui propose 13 comme inconnue dans "3 + 4 + 2 = 6 + __", peut, malgré une erreur de dénombrement, servir d'exemple pour illustrer cette stratégie.

D'autre part, dans ce type de problèmes, les participants ont parfois tendance à ne pas considérer un des nombres derrière le signe =, afin d'obtenir une structure "a + b = c". Une variante de cette stratégie apparaît chez Caroline, qui transforme l'égalité "5 + 3 = 6 + 2" en "3 + 3 = 6 + 2", de manière à ce que le nombre qui suit immédiatement le signe = corresponde à la somme des deux nombres qui le précèdent. Mélissa fait une erreur semblable lorsqu'elle doit monter elle-même une situation concrète qui représente une équation de structure "a + b = c + d", et dans laquelle l'inconnue est représentée par une boîte en carton non transparente. Dans cette situation, elle place deux ensembles de 7 et 5 éléments à gauche ainsi que la boîte en carton et un ensemble de deux éléments à droite. Comme Mélissa a décidé d'insérer 12 objets dans la boîte, on retrouve donc une structure où le nombre qui suit immédiatement le signe = correspond à l'addition des deux nombres qui le précèdent.

Une dernière variante de la même stratégie apparaît lorsqu'un enfant décide d'ignorer le nombre qui suit immédiatement le signe =. Mélissa y a recours lorsqu'elle doit compléter l'équation "6 + 2 = 5 + __". Comme elle propose 8 comme inconnue, nous pouvons déduire qu'elle ignore délibérément le nombre 5, immédiatement après le signe =, pour obtenir une structure "a + b = c." Une stratégie similaire est utilisée par Mathieu, entres autres, lorsqu'il doit compléter l'équation "__ + 4 = 2 + 8", présentée sous forme écrite et représentée comme comparaison, l'inconnue correspondant à une boîte en carton non transparente. En effet, il estime qu'il doit y avoir 4 jetons dans la boîte, et a, par le fait même, transformé l'égalité en "4 + 4 = 8", tout en ignorant le nombre qui suit immédiatement le signe =.

2.3. Apparition de l'erreur dans des situations nouvelles

Les erreurs que nous venons de décrire ne représentent pas des événements isolés. Elles apparaissent chez tous les enfants avec lesquels nous avons travaillé, autant chez ceux que nous avons catégorisés comme fort ou moyen que chez celle que nous avons évaluée comme faible. Nous pouvons donc supposer qu'ils font d'une certaine façon partie du processus d'apprentissage. En même temps, ces erreurs sont un autre indice que l'apprentissage du signe = constitue un important obstacle cognitif. En effet, si l'apprentissage du signe = était relativement facile, pourquoi les enfants s'obstineraient-ils à revenir vers une conception du signe = comme opérateur ? Cette réaction est d'autant plus significative que ces enfants sont déjà en mesure d'attribuer une signification plus adéquate au signe = dans d'autres situations.

Néanmoins, les mêmes stratégies ont tendance à apparaître dans des situations nouvelles pour les élèves, et sous différentes formes : présentation d'une égalité ou d'une équation sans représentation concrète correspondante d'une part, et introduction d'une nouvelle structure d'égalité d'autre part. Deux exemples peuvent illustrer ces situations. Ainsi, lorsque Mathieu ne réussit pas à compléter l'égalité "7 = 2 + __", il se trouve pour la première fois confronté à une équation à partir de l'écriture seulement. D'autre part, quand Mélissa transforme "6 + 2 = 5 + __" en "6 + 2 = 5 + 8", il s'agit de la première fois qu'une équation de structure "a + b = c + d" est présentée.

2.4. Indicateur de la compréhension des enfants

Dans les sections précédentes, nous avons pu déterminer que le retour vers une conception du signe = comme opérateur est un indice que l'apprentissage de ce symbole constitue un obstacle cognitif qui, cependant, ne semble pas revêtir la même importance pour tous les élèves, puisque les enfants ne s'y heurtent pas avec la même fréquence. Ainsi, Mélissa, qui, rappelons-le, est l'élève qui a été classifiée comme moyenne lors du prétest, mais qui a eu le plus de facilité à s'approprier une signification plus adéquate du signe =, retourne rarement vers une conception comme opérateur. De même, Mélissa corrige souvent elle-même ses erreurs dans ce contexte.

Mathieu, élève fort, mais qui a un peu moins bien réussi lors de la séquence d'apprentissage que Mélissa, fait des retours un peu plus fréquents, mais somme toute assez rares vers une conception du signe = comme opérateur. La fréquence de cette erreur diminue au fur et à mesure que nous avançons dans la séquence et que Mathieu progresse.

Caroline, par contre, qui est l'élève qui a éprouvé le plus de difficultés, est également celle qui retourne le plus souvent vers une conception du signe = comme opérateur. De plus, ses erreurs ne se situent pas exclusivement lors de l'introduction de nouvelles situations d'apprentissage, mais également dans des activités, dont la structure a déjà été abordée antérieurement. Le retour vers une conception du signe = comme opérateur apparaît donc aussi dans des situations qui devraient être plus faciles à traiter pour Caroline. Les erreurs diminuent également moins vite que chez les deux autres participants. En général, Caroline éprouve donc plus de difficultés à se départir de sa conception antérieure.

Il semble que chez Mathieu et Mélissa, qui ont moins de difficultés à se construire une nouvelle représentation du signe =, les retours vers une conception comme opérateur du signe = soient plus rares que chez Caroline, évaluée comme élève faible. Dès lors, nous nous demandons si le nombre de fois qu'un élève se sert de la lecture à l'envers et de la transformation d'une égalité en une structure "a + b = c" est un indicateur de l'ampleur de l'obstacle cognitif que constitue l'apprentissage du signe = pour cet enfant.

3. Faible rétention lors du post-test

Un troisième facteur qui illustre la puissance de l'obstacle cognitif que constitue l'apprentissage du signe = est la faible rétention observée chez certains de nos participants lors du post-test, une dizaine de jours à peine après la fin de la séquence d'enseignement. En effet, après une période quand même assez courte sans enseignement du signe =, nous avons pu observer le début d'un retour vers une conception du signe = comme opérateur. Cependant, l'ampleur de ce phénomène diffère d'un enfant à l'autre.

Ainsi, Caroline, élève la plus faible, obtient au post-test des résultats seulement légèrement supérieurs à ceux du prétest. Et encore, l'amélioration lors du post-test n'a été possible que parce qu'il y a eu un certain effet d'apprentissage. Rappelons dans ce cadre que, pour évaluer des égalités de structure "a + b = c", "a = b + c" et "a = a", Caroline fournit exactement le même raisonnement que lors du prétest, en se basant clairement sur une conception du signe = comme opérateur. Ce n'est que lorsque nous la questionnons sur l'égalité "4 + 2 = 6 + 1", qu'elle a réfutée dans un premier temps, que Caroline change de stratégie et commence désormais à construire son argumentation autour d'une conception du signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence. D'ailleurs, lorsque nous lui présentons à nouveau les premières égalités, de structure "a + b = c", "a = b + c" et "a = a", Caroline modifie sa réponse initiale et apporte maintenant des réponses plus appropriées. Par contre, si un certain progrès peut être observé lors de l'évaluation de différentes égalités, Caroline fait le même type d'erreurs qu'au prétest lorsqu'elle doit compléter des équations et résoudre des activités relatives à la compréhension procédurale. Les apprentissages réalisés au sujet du signe = sont donc extrêmement fragiles chez Caroline.

Chez Mathieu, les différences entre le prétest et le post-test sont beaucoup plus substantielles. Cet élève utilise en général le signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence au post-test. Cependant, ses apprentissages restent assez fragiles puisque, dans certaines situations, il amorce un retour vers une conception du signe = comme opérateur. D'une part, Mathieu se pose, à plusieurs moments, des questions sur le sens de la lecture d'une égalité. D'autre part, il n'est pas certain de la signification qu'il doit attribuer aux symboles impliqués dans l'égalité "9 = __ + 2" qu'il doit résoudre, puisqu'il demande s'il faut qu'il obtienne 9 ou 2.

Finalement, Mélissa, élève moyenne, mais qui a été la plus performante lors de la séquence d'enseignement, est la seule élève qui ne laisse pas transparaître un retour vers une conception du signe = comme opérateur. Elle réussit à résoudre correctement toutes les activités du post-test, en se basant sur une conception du signe = comme indicateur de relation d'équivalence.

Deux constats peuvent être déduits de ces observations. D'abord, les apprentissages des enfants sont loin d'être définitifs, même si, lors de la séquence d'enseignement, leurs explications pouvaient paraître convaincantes. Ensuite, nous disposons d'un indice supplémentaire que l'apprentissage du signe = est un obstacle cognitif important.

En ce qui concerne le premier de ces constats, nous avons pu observer une diminution de la performance des enfants par rapport à la dernière séance d'enseignement, déjà une dizaine de jours après la fin de l'enseignement. Certes, il fallait s'attendre à ce que Caroline, qui éprouvait des difficultés tout au long de la séquence, ne réussirait pas nécessairement à résoudre toutes les activités. Les résultats à peine supérieurs à ceux du prétest nous ont cependant surpris. Le même constat vaut pour Matthieu, qui, malgré quelques difficultés, a quand même bien réussi lors de la séquence d'enseignement. Cependant, chez lui aussi, nous avons pu observer une certaine régression depuis la fin de la séquence d'enseignement. Finalement, seule Mélissa n'a montré aucun signe de retour vers une conception du signe = comme opérateur.

Dans ce contexte, il serait intéressant de savoir quelles auraient été les performances des enfants plusieurs semaines, voire plusieurs mois après la fin de la séquence d'enseignement. Est-ce que Mélissa et Mathieu auraient à moyen terme suivi le même processus que Caroline ?

En même temps, le phénomène de régression fournit un indice supplémentaire que l'apprentissage du signe = est un puissant obstacle cognitif. Pourquoi les enfants s'obstineraient-ils sinon à revenir vers leur ancienne conception, une fois qu'ils ne bénéficient plus d'un enseignement explicite du signe = ? La seule explication valable de ce constat est qu'une représentation du signe = comme opérateur est fortement ancrée chez les enfants et qu'il est très difficile pour les participants à notre recherche de dépasser de manière définitive cette conception.

IMPORTANCE D'UNE COMPRÉHENSION PROCÉDURALE ADÉQUATE

Dans le cadre de cette section nous allons dégager les indices qui nous permettent d'affirmer l'importance d'une compréhension procédurale adéquate. Deux constats sont importants dans ce contexte. Premièrement, une compréhension procédurale adéquate semble être un prérequis pour pouvoir progresser dans la compréhension du signe =. En effet, l'élève qui a eu des difficultés à ce niveau a le moins bien progressé. Deuxièmement, ce sont les enfants avec une compréhension procédurale adéquate lors du prétest qui ont bien performé durant la séquence d'enseignement.

1. Une compréhension adéquate comme prérequis pour la modification de la conception du signe = ?

Trois éléments forment la base de notre argumentation : les difficultés de Caroline au niveau de la compréhension procédurale qui l'empêchent de progresser, l'influence d'une mauvaise compréhension procédurale sur le processus de compréhension ainsi que son incapacité d'améliorer sa compréhension procédurale.

1.1. Difficultés lors du prétest

C'est Caroline qui, au cours du prétest, éprouve des difficultés, lorsqu'il s'agit de travailler avec du matériel concret. Ayant devant elle un ensemble de cinq jetons et une boîte en carton non transparente, elle doit déterminer combien de jetons doivent être dans la boîte si, en tout, il y a 8 jetons. Caroline ne réussit pas à résoudre correctement cette activité, puisqu'elle prétend que, dans la boîte, il doit y avoir cinq jetons : le nombre de jetons qu'elle croit présent dans la boîte correspond à celui inclus dans l'autre sous-ensemble. D'ailleurs, exactement la même erreur se produit lorsque Caroline doit résoudre une activité similaire, de structure "4 + __ = 10".

Il serait certes possible d'attribuer ces erreurs à des difficultés de compréhension de la consigne. En effet, Caroline ne répète plus la même erreur lorsque, dans des activités semblables, la boîte en carton est remplacée par un sac en plastique transparent, dans lequel le nombre correspondant de jetons doit être ajouté. Par contre, l'erreur décrite est répétée ultérieurement, alors que nous avons eu, à plusieurs occasions, l'opportunité d'enseigner des stratégies de résolution à Caroline. Il devient donc beaucoup moins probable que ces difficultés sont simplement dues à une mauvaise compréhension de la consigne.

Les constats qui précèdent nous amènent donc à nous demander si une compréhension procédurale très avancée de l'équivalence et de la relation d'addition constitue en quelque sorte un prérequis pour l'apprentissage du signe =. En effet, seuls les enfants qui ont eu de la facilité à ce niveau ont réussi à modifier de manière durable leur conception du signe =.

Rappelons dans ce cadre que Mathieu et Mélissa, qui ont somme toute bien performé dans l'apprentissage du signe =, n'ont pas éprouvé de difficultés au niveau de la compréhension procédurale lors du prétest.

1.2. Influence de la compréhension procédurale sur l'apprentissage

Dans la section précédente, nous avons établi l'hypothèse qu'une compréhension procédurale adéquate est en quelque sorte un prérequis pour pouvoir cheminer dans la compréhension du signe =. Dans cette section, nous allons décrire comment les difficultés de Caroline au niveau de la compréhension procédurale influencent son apprentissage.

Rappelons dans ce cadre que Caroline a souvent recours à des stratégies de manipulation non pertinentes, des stratégies soit liées exclusivement à une compréhension procédurale incomplète, soit dues à des difficultés de compréhension du signe =.

Parmi les difficultés reliées exclusivement à une compréhension procédurale déficiente, nous retrouvons principalement l'incapacité d'appliquer une stratégie de redistribution du matériel concret. Cette stratégie est pertinente pour établir un constat d'équivalence et pour compléter des équations, tout en manipulant le matériel. Par exemple, un enfant pourrait avoir à compléter l'équation "3 + __ = 8", représentée concrètement sous forme de comparaison, l'inconnue étant représentée par une boîte en carton non transparente. Dans ce cas il suffit de séparer l'ensemble de 8 en un ensemble de 3 et de 5 pour déterminer combien de jetons se trouvent dans la boîte.

Cependant, nous avons vu que Caroline est réticente à utiliser cette stratégie qu'elle appelle "tricher". À plusieurs reprises, elle insiste qu'elle a uniquement fait un calcul mental et qu'elle n'a pas travaillé avec le matériel concret. De plus, lorsqu'elle se sert de la manipulation des jetons, elle le fait souvent de manière erronée. Citons en guise d'exemple sa tentative de compléter l'équation "6 + 2 = 5 + __", présente sous forme écrite et représentée sous forme de comparaison, avec une boîte en carton non transparente comme inconnue : Caroline sépare l'ensemble de 6 jetons à gauche, en deux sous-ensembles de 5 et 1 et prétend qu'il doit y avoir un jeton dans la boîte. Cette difficulté est clairement reliée à une compréhension procédurale déficiente, puisqu'elle se situe au niveau de la manipulation. Cependant, elle empêche en même temps Caroline de résoudre de manière efficace la partie de l'activité qui fait intervenir l'écriture formelle et le signe =.

Un premier constat s'impose face à ces erreurs : Ce sont en partie des difficultés au niveau de la compréhension procédurale qui empêchent Caroline de compléter des équations au niveau formel. Par ailleurs, un autre type de difficultés, relié lui aussi à la compréhension procédurale, semble également jouer un rôle important. Ainsi, Caroline, tout en étant consciente que le signe = indique une égalité, éprouve des difficultés à déterminer ce qui est égal.

En guise d'exemple, rappelons que Caroline ne réussit pas à compléter l'égalité "9 = __ + 2", présente sous forme écrite et représentée concrètement comme comparaison. Elle prétend qu'il doit y avoir 9 jetons dans la boîte, en se basant sur une compréhension erronée du signe = : "*Le signe = signifie que c'est la même chose. […] C'est la même chose ici (montre ensemble de 9 à gauche) et dans la boîte*." Caroline attribue donc en quelque sorte au signe = une signification comme indicateur d'une relation d'équivalence, mais ne sait pas comment l'appliquer concrètement. Certes, cette erreur fait aussi appel à la compréhension formelle déficiente, puisqu'elle se situe au niveau de l'écriture formelle. Cependant, une compréhension procédurale adéquate aurait dû permettre à Caroline de mener à terme cette activité.

À la fin de cette section, nous pouvons donc conclure que les difficultés de Caroline au niveau de la compréhension procédurale ont une influence certaine sur sa compréhension du signe =. Ainsi, ce sont en partie l'utilisation de stratégies erronées lors du travail sur la situation concrète qui empêchent Caroline de comprendre la symbolisation mathématique.

1.3. Évolution de la compréhension procédurale

L'analyse du cas de Caroline rapporte un autre élément intéressant en ce qui concerne l'importance d'une compréhension procédurale adéquate : notre séquence d'enseignement, dans laquelle l'écriture était liée le plus souvent à une situation concrète, ne lui permet pas d'améliorer sa compréhension procédurale.

Lors du post-test, des lacunes importantes persistent à ce niveau, Caroline commettant même plus d'erreurs qu'au prétest. Ainsi, elle se heurte toujours à des difficultés importantes lorsqu'elle doit déterminer combien de jetons sont cachés dans une boîte en carton non transparente. À cela se rajoutent maintenant des difficultés dans des tâches similaires, où l'inconnue est représentée par un sac transparent dans lequel il faut ajouter un certain nombre de jetons. Rappelons dans ce cadre que, lors du post-test, Caroline n'est plus en mesure de déterminer combien d'objets elle doit rajouter à un ensemble de 2 jetons, à gauche, pour qu'il y ait la même quantité que dans un ensemble de 6 jetons, à droite. En fait, d'autres erreurs se sont rajoutées dans les activités portant sur la compréhension procédurale. Certes, la fatigue de Caroline ou un manque de concentration pourraient avoir contribué à ce résultat. Il n'en reste pas moins que Caroline ne semble pas avoir réussi à dépasser ses difficultés de compréhension procédurale.

1.4. Pertinence de l'enseignement du signe =

Dans cette section, nous avons réussi à déterminer que les difficultés de Caroline sont étroitement liées à sa compréhension procédurale déficiente. Dès lors, nous nous posons la question de savoir s'il est pertinent d'essayer d'enseigner la signification du signe = à des enfants qui ont encore des difficultés majeures avec la compréhension procédurale de l'équivalence et de l'addition. Deux constats alimentent nos doutes à ce sujet.

D'une part, dans une séquence d'enseignement dont une des caractéristiques est la combinaison de l'écriture et de l'aspect concret, Caroline ne réussit pas à avancer de manière significative au niveau de sa compréhension procédurale. D'autre part, Caroline ne modifie pas de manière durable et cohérente sa conception du signe =. Lors du post-test, les résultats de Caroline ne sont que légèrement supérieurs à ceux du prétest au niveau des activités visant la compréhension formelle. En même temps, Caroline ne maintient pas les apprentissages qu'elle semble avoir acquis en fin de séquence d'enseignement.

Sous ces conditions, est-il pertinent d'enseigner à des enfants qui, comme Caroline, ont encore des problèmes au niveau de la compréhension procédurale que le signe = constitue un indicateur de relation ? Manifestement, nos efforts n'ont de toute façon pas mené à un changement durable de la signification attribuée au signe =. Nous nous demandons donc s'il n'aurait pas été plus efficace pour cette élève de travailler dans un premier temps uniquement au niveau concret, jusqu'à ce qu'elle ait acquis une compréhension procédurale adéquate, quitte à introduire, dans un deuxième temps, l'aspect formel, une fois que les prérequis pour un apprentissage durable du signe = sont acquis.

2. Enseignement efficace du signe = dans certaines conditions

Si l'enseignement du signe = ne s'est pas avéré fructueux pour Caroline, notamment à cause d'une compréhension procédurale déficiente, tel n'est pas le cas pour Mélissa et Mathieu. Ces deux élèves réussissent à attribuer au signe = une signification comme indicateur d'une relation dans différentes situations additives à la fin de la séquence. Deux éléments relatifs à la compréhension procédurale semblent avoir contribué à ce phénomène. D'une part, les deux enfants disposent d'une bonne compréhension procédurale lors du prétest. D'autre part, ils sont, à différents degrés, en mesure d'utiliser des stratégies additives variées pour résoudre les activités proposées.

2.1. Compréhension procédurale adéquate, mais de niveau différent

Une des caractéristiques des enfants qui ont réussi à modifier de manière significative leur conception du signe = est qu'ils n'éprouvent aucune difficulté reliée à la compréhension procédurale de l'addition et de l'équivalence. Lorsque nous réalisons le prétest avec Mélissa et Mathieu, ceux-ci sont très à l'aise avec la compréhension procédurale du nombre, de l'addition et de l'équivalence. Nous observons quand même des différences notables entre eux. Mathieu, caractérisé comme étant un élève fort par son enseignante, a recours à une seule stratégie, un double dénombrement sur les doigts, pour résoudre les activités proposées.

Mélissa par contre, élève classifiée comme ayant des difficultés scolaires, utilise des stratégies beaucoup plus diversifiées : lorsqu'elle doit traiter la représentation concrète d'une égalité de structure "a + __ = c", elle se sert d'une addition dans la première des situations, et d'une soustraction dans la deuxième. Ainsi, face à la représentation sous forme d'inclusion de "5 + __ = 8", son explication indique qu'elle a effectué une addition : "*Il y en a 3, parce que 5, et + 3, ça donne 8*". Par contre, confrontée à une représentation sous forme de comparaison de structure "4 + __ = 10", elle sort 4 jetons de l'ensemble de 10. Par conséquent, en ayant recours à une soustraction, elle parvient à trouver le nombre correspondant à l'inconnue. Finalement, face à une représentation de structure "7 = 4 + __", sous forme de comparaison et dans laquelle l'inconnue correspond à un sac en plastique transparent, c'est une redistribution mentale des jetons qui amène Mélissa à trouver l'inconnue : "*J'ai pensé que j'en avais 4, j'en sors 3 ici (de l'ensemble de 7), et je suis allée chercher le reste*."

Nous pouvons donc constater que, si les deux enfants réussissent à résoudre les activités visant à évaluer la compréhension procédurale, leur maîtrise de cet aspect n'est pas identique. Si Mathieu se réfère à une seule stratégie, assez simple, pour mener à terme les activités demandées, Mélissa dispose d'un éventail beaucoup plus diversifié de stratégies additives et soustractives. Certes, cette affirmation se base uniquement sur la résolution de quelques activités, et il serait possible que Mathieu connaisse d'autres stratégies, mais auxquelles, pour une raison ou une autre, il n'a pas recours.

2.2. Stratégies additives variées

Une deuxième caractéristique qui distingue les enfants qui ont réussi dans la modification de la conception du signe = est qu'ils ont à leur disposition une grande variété de stratégies additives. Ces enfants arrivent à choisir la stratégie la plus adaptée à la situation à laquelle ils font face. Ceci est particulièrement vrai pour Mélissa, qui malgré le fait qu'elle éprouve, selon son enseignante, des difficultés scolaires, a réussi à cheminer particulièrement bien dans l'apprentissage du signe =. Dans le cadre de cette section, nous allons décrire les trois principaux types de stratégies utilisées par Mélissa et Mathieu, à savoir le recours au total présent des deux côtés du signe =, la manipulation du matériel et les stratégies additives et soustractives.

2.2.1. Recours au total présent des deux côtés

Une des stratégies les plus fréquemment utilisées par Mélissa et Mathieu est de déterminer le total présent des deux côtés du signe =. Les enfants y ont recours à la fois pour des égalités de structure "a + b = c" ou "a = b + c" que pour des égalités plus complexes, de structure "a + b = c + d"

2.2.2. Manipulation du matériel concret

Nous l'avons déjà mentionné antérieurement : la manipulation du matériel concret est le moyen le plus facile pour traiter certaines des tâches que nous proposons aux enfants. Prenons comme exemple l'équation "5 + __ = 7", présente sous forme écrite et représentée sous forme de comparaison, l'inconnue correspondant à un sac en plastique transparent dans lequel il faut ajouter le nombre correct d'objets. Comme le signe = indique que la même quantité doit être présente des deux côtés, une des stratégies les plus faciles est de modifier la disposition du matériel afin d'obtenir exactement les mêmes ensembles des deux côtés. Pour ce faire, il suffit de séparer 5 jetons de l'ensemble de 7, à droite, et on peut voir immédiatement que le deuxième ensemble issu de cette séparation contient 2 éléments. À partir de ce constat, il est clair qu'il faut également insérer 2 objets dans le sac.

Or, ni Mathieu, ni Mélissa ne se servent de cette stratégie dans l'exemple décrit, mais ont recours à une addition. Les deux élèves acceptent cependant cette stratégie quand nous poussons plus loin le questionnement. Ainsi, Mathieu, à qui nous demandons pourquoi il ne s'est pas servi des jetons, répond qu'on aurait pu utiliser cette stratégie aussi. Mélissa, pour sa part, se sert de la séparation de l'ensemble de 7 objets en deux sous-ensembles de 2 et 5 éléments lorsque nous lui demandons de montrer à l'aide du matériel concret que la même quantité est présente des deux côtés. Ce n'est donc pas parce qu'ils ne comprennent pas la stratégie de manipulation des jetons que Mélissa et Mathieu ne s'en servent pas, mais tout simplement parce qu'ils en ont choisi une autre, qu'ils croient probablement plus efficace dans cette situation.

D'ailleurs, la situation est semblable dans toutes les autres situations, dans lesquelles Mélissa et Mathieu doivent traiter des équations de structure "a = b + c" ou "a + b = c". En effet, s'ils acceptent qu'on peut se servir du matériel concret, ils n'y ont généralement pas recours pour déterminer l'inconnue.

La situation change lors de l'introduction d'égalités de structure "a + b = c + d". Lorsqu'il s'agit de déterminer dans ce type de situations, si la mise en place du signe = est appropriée, Mathieu se sert spontanément de la manipulation du matériel. Ainsi, face à l'égalité "6 + 2 = 5 + 3", présente sous forme écrite et représentée comme comparaison, Mathieu enlève un objet de l'ensemble de 6 pour le mettre dans l'ensemble de 3. De cette manière, il réussit donc à obtenir exactement les mêmes ensembles des deux côtés. La stratégie est similaire lorsque Mathieu fait face à des égalités représentées sous forme d'inclusion. Dans ce cadre, c'est l'application de l'opération inverse au niveau concret qui permet à Mathieu d'établir son constat d'équivalence.

Les réactions de Mélissa sont différentes. Elle n'a pas recours spontanément à la manipulation du matériel lorsqu'il s'agit d'évaluer des égalités de structure "a + b = c + d". Elle choisit plutôt de se référer à l'écriture. Ce constat ne signifie cependant pas que Mélissa ne comprend pas la stratégie de redistribution. Elle y a recours, à l'occasion, mais la redistribution se fait mentalement, sans recours au matériel. Ainsi, lorsque Mélissa doit évaluer l'égalité "5 + 4 = 6 + 3", elle fournit une explication qui se réfère à cette stratégie : "*Regarde, ici, c'est 5 + 4, et ici, c'est 6 + 3,* *alors on peut remplacer ici le 5 par un 6, mais si c'est 6, il ne faut pas mettre 4, mais quelque chose d'un peu plus petit*". Mélissa reconnaît donc que, si elle ajoute un élément à l'ensemble de 5, elle doit en retrancher un à l'ensemble de 4.

Au regard des éléments décrits précédemment, deux constats s'imposent : dans le cadre d'une stratégie de redistribution, Mathieu n'a recours au matériel que dans un certain type de situations. D'autre part, c'est Mélissa qui se détache le plus facilement du matériel concret ; elle réussit le mieux dans la séquence d'enseignement, malgré le fait que l'enseignante lui avait attesté des difficultés scolaires.

Mathieu ne se sert de la redistribution du matériel concret que lorsqu'il est en face d'égalités de structure "a + b = c + d". Par contre, il y renonce pour travailler des égalités ou des équations de structure moins complexe. Nous pouvons donc supposer que Mathieu n'a recours au matériel que dans des situations qui lui paraissent particulièrement complexes, se sentant incapable de les résoudre mentalement.

Ce constat est d'ailleurs d'une certaine manière corroboré par le comportement de Mélissa. Alors que nous avons essayé de l'inciter explicitement à se servir de la redistribution du matériel, elle choisit tout au long de la séquence d'enseignement des stratégies qui se situent davantage au niveau formel, et ceci pour tous les types de structures. Nous supposons que Mélissa est suffisamment à l'aise face au type de situations présentées pour se détacher de la manipulation du matériel concret. D'ailleurs, ce détachement est un des éléments qui la distingue de Mathieu et qui pourrait contribuer à expliquer sa bonne performance tout au long de la séquence d'enseignement.

2.2.3. Structures additives et soustractives

Une autre caractéristique qui démarque Mélissa et Mathieu, par rapport à Caroline, est l'emploi fréquent de structures additives et soustractives. Cependant, si ces stratégies se retrouvent chez les deux participants qui ont bien performé dans la séquence d'enseignement, il existe quand même des différences notables entre Mathieu et Mélissa. Comme nous allons le voir dans cette section, les deux élèves ont recours à des structures additives simples et comprennent la propriété de commutativité. Cependant, Mélissa semble avoir une compréhension plus avancée des structures additives, puisqu'elle se sert fréquemment d'une soustraction pour compléter différentes inconnues. Par contre, chez Mathieu, cette stratégie, plus complexe qu'une addition, est largement absente.

a) Maîtrise des structures additives simples

L'addition est utilisée à la fois par Mélissa et par Mathieu pour compléter des équations de différentes structures. La manière dont cette stratégie est appliquée est sensiblement la même chez ces deux élèves. Citons, à titre d'exemple, la réaction de Mathieu, quand il est confronté à l'équation "10 = __ + 4", présente sous forme écrite seulement : "*C'est très facile […], il faut faire + 6 ici. Je la connais par cœur.*" Si Mathieu semble connaître par cœur un certain nombre d'additions, c'est souvent un double dénombrement qui lui permet de déterminer l'inconnue lorsqu'il ne sait pas immédiatement la réponse adéquate. Une différence notable existe cependant entre Mélissa et Mathieu. En effet, si Mélissa sait comment se servir d'une addition dans ce type de situation, elle a plus souvent recours à une soustraction, une stratégie plus complexe, clé aussi de son succès.

D'autres similitudes peuvent être observées lorsqu'il s'agit de compléter des équations de structure "a + b = c + d". Dans ces situations, Mathieu se sert souvent d'une addition ; tel est par exemple le cas lorsqu'il doit compléter l'équation "7 + __ = 5 + 5". Celle-ci est présentée sous forme écrite et représentée comme comparaison, l'inconnue correspondant à un sac en plastique transparent dans laquelle Mathieu doit ajouter le nombre correct d'objets. La réponse de Mathieu est immédiate, et son explication laisse conclure que c'est par une addition qu'il a réussi à déterminer la valeur de l'inconnue. "*J'en ai 7, alors 8, 9, 10, c'est encore 3. Je le connais aussi ce calcul, alors c'est plus vite.*" Les stratégies de Mélissa sont dans ce contexte souvent similaires. Une différence persiste cependant entre les deux élèves : Mathieu se sert parfois dans ces situations du matériel concret pour déterminer l'inconnue, tandis que ceci n'est presque jamais le cas pour Mélissa.

Finalement, les réponses données par Mélissa et Mathieu nous permettent de conclure que les deux enfants ont, somme toute, une bonne compréhension des structures additives. En effet, dans deux situations, ils prouvent qu'ils sont en mesure de maîtriser la complexité de ces structures additives. Lorsque nous présentons à Mathieu l'égalité "3 + 1 + 2 __ 4 + 2", il procède à une redistribution des nombres à l'intérieur de l'égalité : *"On peut mettre le signe =, parce que 3 + 1, c'est 4, et c'est + 2 de chaque côté. Tu as juste écrit différemment ceci (3 + 1) pour que ça donne 4.*" La stratégie de Mélissa est similaire, lorsqu'elle doit compléter l'équation "4 + 2 + 1= 5 + __", présentée sous forme écrite et représentée par une comparaison, dans laquelle l'inconnue correspond à un sac en plastique transparent, dans lequel le nombre correct d'objets doit être ajouté. "*Il faut en mettre 2, parce qu'ici, c'est écrit 4 + 2 + 1, alors j'ai fait 4 + 1, ça donne 5, et plus 2*". Le recours à une stratégie complexe de redistribution confirme donc que la maîtrise de l'addition est avancée, à la fois chez Mathieu et chez Mélissa.

b) Maîtrise de la commutativité

Mélissa et Mathieu, et c'est une autre de leurs caractéristiques, ont une bonne maîtrise de la commutativité de l'addition. Les deux élèves se servent de cette propriété dans les activités qui la font intervenir. Lorsqu'ils doivent compléter différentes équations qui traduisent la commutativité de l'addition, leur réponse est en général instantanée. Ceci nous laisse supposer qu'ils ne passent pas par le total présent des deux côtés, mais se servent de la commutativité pour déterminer la valeur de l'inconnue. Cette supposition est confirmée par l'explication de Mathieu, qui suit le travail sur une structure "4 + 5 = 5 + __" : "*Il faut mettre un 4. C'est parce que j'ai copié ici (montre 4 + 5 à gauche du signe =).*"

Un autre indice d'une bonne maîtrise de la commutativité de l'addition est l'aisance avec laquelle les enfants travaillent avec des nombres qui leur sont en principe inconnus. Ainsi, les deux réussissent à compléter l'équation "23 + __ = 45 + 23", présentée sous forme écrite seulement, alors qu'ils ne connaissent probablement pas les nombres impliqués. Il est donc impossible dans ce contexte que les enfants aient eu recours au total présent des deux côtés du signe =.

Finalement, un dernier indice d'une bonne maîtrise de la commutativité peut être observé chez Mélissa. En effet, elle se sert de cette propriété pour faciliter certains calculs. Lorsqu'elle doit évaluer l'égalité "8 = 2 + 6", elle transforme l'addition "2 + 6" en "6 + 2", pour établir le total des deux côtés. Cette transformation lui permet de calculer à partir du plus grand des deux nombres, ce qui facilite probablement l'addition mentale. Observée de manière isolée, cette stratégie pourrait certes être attribuée à une lecture à l'envers et à un retour vers une conception du signe = comme opérateur. Cependant, comme Mélissa commence systématiquement, et dans différentes situations, avec le plus grand nombre de l'addition lorsqu'elle doit calculer une somme, nous imputons plutôt cette stratégie à une bonne maîtrise de la commutativité.

c) Emploi de la soustraction

Un des facteurs qui démarque Mélissa de Mathieu est son recours fréquent à la soustraction lorsqu'elle doit compléter différentes équations. Alors que Mélissa se sert fréquemment de cette stratégie, Mathieu n'y a recours à aucun moment. Comme nous allons le voir dans le cadre de cette section, cette particularité est un des facteurs qui peut contribuer à expliquer pourquoi Mélissa obtient des meilleurs résultats que Mathieu.

Comme nous l'avons mentionné lorsque nous avons décrit la progression de Mélissa tout au long de la séquence d'enseignement, le recours à une soustraction n'est pas la stratégie la plus facile pour compléter une équation de structure "a = b + c". Cette stratégie nécessite de la part de l'enfant un certain détachement des objets concrets et surtout une excellente maîtrise des différentes structures additives. Car, d'une part, l'enfant doit comprendre que l'addition et la soustraction sont des opérations inverses, et, d'autre part, il doit transformer l'équation afin que la soustraction puisse lui être utile.

Or, malgré cette complexité, la soustraction est la stratégie la plus souvent utilisée par Mélissa lorsqu'elle doit compléter des équations de structure "a = b + c" ou "a + b = c". Citons dans ce cadre, à titre d'exemple, sa réaction lorsqu'elle doit compléter "__ + 3 = 9", présenté sous forme écrite seulement : "*C'est 6, parce que j'ai fait d'abord 9, et j'en ai enlevé 3 par la suite.*" La réaction de Mélissa est d'ailleurs analogue dans de nombreuses autres activités de ce type.

Par contre, Mélissa utilise beaucoup plus rarement une stratégie soustractive lorsqu'elle complète des équations de structure "a + b = c + d". En fait, ce n'est qu'une seule fois qu'elle y a recours, et ce, lorsqu'elle doit compléter "3 + __ = 7 + 2", présenté sous forme écrite seulement. "*C'est 6, parce que j'ai fait 3, et après, j'ai pensé 9 (probablement le total de 7 et 2, à droite), et j'en ai enlevé 3, et j'ai vu qu'il y en avait 6.*"

Il est intéressant de constater que c'est seulement Mélissa qui a recours à des stratégies soustractives pour compléter des équations de différents types. Rappelons que, lors du prétest, Mélissa a des résultats similaires à ceux de Mathieu, mais a seulement été classifiée comme élève moyenne, puisque l'enseignante nous a fait part de difficultés scolaires qu'elle éprouve. Cependant, malgré ces difficultés, c'est Mélissa qui a eu les meilleurs résultats parmi nos trois participants au post-test. Dans ce cadre, son excellente maîtrise des structures additives et soustractives peut être un des éléments qui peuvent contribuer à expliquer son excellente performance. En effet, le recours à des soustractions fait entrer en jeu des opérations mentales complexes et nécessite une compréhension approfondie des structures additives.

D'autre part, Mélissa n'utilise la soustraction que dans un certain type de situations, soit des équations de structure "a + b = c". Par contre, elle n'y a recours que rarement dans des situations de structure "a + b = c + d", où l'emploi de cette stratégie nécessite des opérations mentales encore plus complexes. Deux facteurs pourraient expliquer ce phénomène. Il est possible que Mélissa ne soit pas encore en mesure de gérer la complexité de cette stratégie dans ce type de situations. D'un autre côté, le choix d'autres opérations pourrait tout simplement être attribué au fait que celles-ci sont plus efficaces pour mener à terme des activités de ce type.

LIEN ENTRE UNE ÉGALITÉ ET SA REPRÉSENTATION CONCRÈTE

La description des cas de Mathieu, Caroline et Mélissa a montré que, même si des enfants ont, au départ, des difficultés à relier une égalité ou une équation à une représentation concrète, ils peuvent cheminer dans la compréhension de cette tâche. Dans le cadre de cette section, nous allons d'abord voir que l'établissement de ce lien est plus ou moins difficile selon la structure d'égalité et de la représentation concrète à laquelle les enfants font face. Par la suite, nous allons montrer que les élèves n'ont pas nécessairement progressé de la même manière tout au long de la séquence. Finalement, nous allons cerner la capacité de gérer simultanément la représentation concrète et l'équation qui l'accompagne comme un des signes qui permet de distinguer les enfants forts de ceux qui ont moins bien réussi.

1. Degré de difficulté différent

Selon le type de représentation concrète que nous avons présenté aux enfants, ceux-ci ont plus ou moins de difficultés à établir un lien entre une égalité ou une équation et sa représentation concrète. Dans le cadre de cette section, nous allons, dans un premier temps, analyser le lien entre l'écriture et la représentation concrète dans des activités qui font intervenir des structures "a + b = c" ou "a = b + c". Par la suite, nous allons décrire la compréhension de ce lien dans des structures plus complexes, de structure "a + b = c + d".

1.1. Lien dans des structures additives simples

En général, il a été facile pour les enfants, dès le départ de la séquence d'enseignement, de faire ce lien lorsque la représentation d'une égalité de structure "a + b = c" ou "a = b + c" prenait la forme d'une comparaison. En effet, dès l'explication du signe = lors de la première séance, les trois participants sont en mesure de montrer de manière cohérente, avec une représentation comme comparaison, les objets qui correspondent aux différents nombres. De même, leur justification est la plupart du temps cohérente et se rapporte à la présence de la même quantité des deux côtés.

Citons à titre d'exemple les réactions de Caroline et de Mathieu lorsqu'ils doivent évaluer l'égalité "9 = 4 + 5" lors de la première séance. Cette égalité est accompagnée d'une représentation sous forme de comparaison, et l'activité se déroule immédiatement après l'introduction du signe =. Dans cette situation, Caroline n'a aucune difficulté à montrer les objets qui correspondent aux différents nombres et explique la mise en place du signe =, en se référant à une conception de celui-ci comme indicateur d'une relation d'équivalence : "*On peut mettre le signe = quand on calcule et quand on fait d'autres choses aussi, mais on peut uniquement le mettre* *quand il y a la même chose.*" Des difficultés apparaissent cependant pour Caroline lorsqu'elle doit compléter différentes équations de structure "a + b = c" ou "a = b + c", présentes sous forme écrite et représentées comme comparaison. Dans ces situations, Caroline réussit à déterminer la valeur de l'inconnue, mais est ensuite incapable de montrer de manière cohérente les objets qui correspondent aux différents nombres.

Mathieu, pour sa part, réunit, puis sépare de nouveau les jetons présents à sa droite et se base sur la présence du même total des deux côtés : "*Ici, il y en a 9, et ici, il y en a 9 aussi (en montrant les jetons)*". Lorsque Mélissa est confrontée à ce type de situations, sa réaction est similaire à celle de Mathieu.

Le portrait change lorsque les enfants sont confrontés à des représentations sous forme d'inclusion du même type d'égalités. Ce sont Mélissa et Mathieu qui éprouvent des difficultés lorsqu'il s'agit de relier l'égalité à sa représentation concrète. Il semble surtout plus difficile pour Mathieu d'établir ce qui est équivalent au niveau de la représentation concrète dans ce type de structure. Ainsi, même s'il est en mesure d'identifier que "5 + 3" représente la même quantité que "8", ce constat est plus difficile lorsqu'il s'agit de le transférer à une représentation concrète sous forme d'inclusion de cette égalité. "*Il n'y a rien qui est pareil ici (dans la représentation concrète), parce qu'ici, il y en a 5 (montre le sous-ensemble de 5), et ici, il y en a 3 (montre le sous-ensemble de 3)*". Mélissa n'est pas en mesure non plus d'expliquer que 6 est la somme des deux sous-ensembles de 2 et 4 dans un exemple similaire, de structure "2 + 4 = 6" : "*Ici (montre le sous-ensemble de 2), c'est 2, et ici (montre le sous-ensemble de 4), c'est 4. On dit que c'est 6, parce que c'est 6… C'est 6, parce que ça donne 6.*"

Pour ce qui est de Caroline, les mêmes difficultés n'ont pu être observées. Ce constat ne démontre cependant pas que Caroline est davantage en mesure d'établir le lien entre l'écriture et une représentation concrète sous forme d'inclusion. En fait, nous avons omis, lors de la passation de la séquence, de pousser aussi loin le questionnement que chez les autres participants. La seule indication que nous avons à ce sujet est que Caroline sait très bien relier l'écriture à la représentation concrète sous forme d'inclusion lorsque nous travaillons l'égalité "9 = 4 + 5" :

> "C'est la même chose, parce que, même si tu fais comme ça (réunit les deux sous-ensembles en un pour en avoir 9), c'est 9. Et quand tu as fait comme ça (sépare les 9 en deux sous-ensembles de 5 et 4), c'est la même chose aussi, parce que 9, le reste ici (5 + 4), je sais combien ça donne ensemble. (met le signe =)."

Cependant, dans la même situation, Mélissa et Mathieu n'éprouvent pas les mêmes difficultés que celles décrites auparavant, et ils justifient, comme Caroline, la mise en place du signe = par le fait que les jetons ont uniquement été séparés. Ce n'est donc pas les égalités de structure "a = b + c", mais plutôt celles de structure "a + b = c" qui posent problème au niveau de l'établissement d'un lien entre ces égalités et leur représentation concrète. Une des explications de ce phénomène peut être reliée au type d'activités que les enfants ont rencontré à l'école. En effet, les égalités de structure "a + b = c" y sont largement dominantes, et c'est en travaillant avec ce type d'égalités que les enfants se sont construit une représentation du signe = comme opérateur. Il est possible que ce facteur contribue aux difficultés des enfants à saisir pleinement la relation d'égalité, tant au niveau de l'écriture qu'au niveau de la représentation concrète dans ce type de situation.

1.2. Lien dans des structures additives plus complexes

Les différences entre Mélissa et Mathieu, d'une part, et Caroline, d'autre part, deviennent plus importantes si on analyse la capacité de ces enfants de relier des égalités de structure "a + b = c + d" à leur représentation concrète. Si les deux premiers sont assez à l'aise dans l'établissement de ce lien, Caroline, qui est notre participante la plus faible, connaît des difficultés importantes.

Pour Mathieu, c'est l'application de l'opération inverse à l'opération de départ qui lui permet de montrer ce qui est égal au niveau de la représentation concrète. Ainsi, après la modification de deux ensembles de 3 et 4 objets en deux ensembles de 2 et 5 objets, Mathieu se base explicitement sur cette inversion :

> "On peut mettre le signe = (entre "3 + 4" et "2 + 5"), parce que, au lieu d'enlever un jeton, tu l'as uniquement changé de côté (Mathieu remet le jeton qui a été transféré dans l'ensemble initial et répète la transformation réalisée au début de l'activité)."

Dans cette situation, Mathieu n'a donc eu aucune difficulté à déterminer à quel niveau se situe l'équivalence dans la représentation concrète. L'argumentation de Mélissa s'appuie à la fois sur la réversibilité, au niveau concret, et la présence du même total des deux côtés du signe = lorsqu'elle doit évaluer l'égalité.

> "3 + 5 = 7 + 1" : "Parce que 3 + 5, c'est 8, et 7 + 1, ça donne 8 aussi. […]. C'est la même chose, mais si on les met encore une fois comme auparavant (retransforme la situation concrète en deux ensembles de 3 et 5), c'est aussi la même chose."

Pour Mélissa et Mathieu, le contexte inclusif, qui leur a posé des problèmes lors du traitement de structures additives simples, semble donc être maîtrisé dans ce contexte. Nous pouvons conclure que ce n'est pas la présence d'un contexte inclusif en tant que tel qui constitue un obstacle cognitif aux enfants. Comment expliquerait-on sinon que ce contexte ne pose pas problème lorsqu'il représente une structure plus complexe, alors qu'il induit ces enfants en erreur dans une structure additive plus simple. L'hypothèse que les enfants ont plutôt de la difficulté à modifier leur représentation d'une structure additive, qui est probablement à la base de leurs difficultés de compréhension du signe =, est donc renforcée. Reste à rajouter que, pour Mélissa et Mathieu, les représentations sous forme de comparaison de structures "a + b = c + d" n'ont posé aucun problème.

Si nos deux participants les plus performants ont été très à l'aise dans l'établissement d'un lien entre des égalités de structure "a + b = c + d" et leur représentation concrète, le portrait est tout autre pour Caroline. Celle-ci éprouve d'importantes difficultés à deux niveaux. D'une part, elle ne réussit pas toujours à créer ce lien dans des représentations sous forme de comparaison. D'autre part, elle a des difficultés encore plus importantes lorsqu'elle est en face de représentations sous forme d'inclusion.

En ce qui concerne le premier de ces aspects, rappelons que c'est après avoir évalué correctement et représenté elle-même sous forme de comparaison l'égalité "3 + 1 + 2 = 4 + 2" que des difficultés se manifestent. En effet, pour justifier la mise en place du signe =, Caroline essaie d'additionner tous les nombres présents dans l'égalité. Dans cette situation, Caroline a donc réussi à générer une représentation concrète à partir de l'écriture, mais c'est au niveau de l'écriture qu'une mauvaise compréhension du signe = l'induit en erreur.

L'autre difficulté de Caroline concerne les représentations sous forme d'inclusion des égalités de structure "a + b = c + d". Ainsi, dans les trois activités de ce type que nous avons travaillées avec Caroline, elle réussit à établir correctement que la mise en place du signe = est appropriée. Par contre, dans aucune des situations, elle n'est en mesure de relier l'équation à la situation concrète. Contrairement aux autres participants, Caroline n'est pas en mesure d'effectuer l'opération inverse pour retrouver la situation de départ. Dans ce cadre, elle ne parvient à aucun moment à montrer quels objets concrets correspondent aux différents nombres de l'égalité.

Les difficultés de Caroline concernant les représentations sous forme d'inclusion d'égalités de structure "a + b = c + d" se situent donc principalement au niveau concret. Dans ce contexte, elles peuvent s'expliquer par les carences de Caroline au niveau de la compréhension procédurale de l'addition et de la relation d'équivalence.

L'attitude de Caroline dans ces situations est également intéressante sous un autre point de vue. En effet, ses difficultés à établir le lien entre des égalités plus complexes et leur représentation concrète sont un autre élément qui la distingue, comme élève faible, de Mélissa et Mathieu, qui ont bien performé dans la séquence d'enseignement.

2. Gestion simultanée de l'écriture et la représentation concrète

Au cours de certaines activités, nous avons demandé à nos participants de traiter simultanément une égalité et sa représentation concrète. Comme nous allons le voir dans cette section, cette gestion ne va pas de soi, et des différences notables peuvent être observées dans la façon dont elle est appliquée.

Dans les activités correspondantes, nous avons présenté aux enfants une fausse égalité accompagnée d'une représentation concrète sous forme de comparaison. Ces fausses égalités, de structures différentes selon le moment dans la séquence où elles sont présentées, sont évaluées par les enfants. Dans un premier temps, ils constatent que la mise en place du signe = n'est pas appropriée. Par la suite, ils modifient la situation, tant au niveau de l'égalité qu'au niveau de sa représentation concrète, afin de la transformer en une égalité.

Nous avons pu observer trois types de réactions différentes, dont les deux premières sont caractéristiques d'un élève fort. D'une part, la réaction la plus adaptée à ce type de situation est de modifier spontanément l'écriture et la représentation concrète. D'autre part, certains enfants modifient seulement un des aspects, oublient de modifier l'autre, mais se rendent assez vite compte qu'il faut apporter d'autres changements. Finalement, une dernière réaction, caractéristique d'un élève faible, est de changer un des aspects et d'accepter l'autre, qui n'a pas été touché, même sans avoir apporté de changements.

Les réactions de Mathieu, comme nous l'avons vu lors de la description de son cas, sont essentiellement du premier type. Face aux fausses égalités que nous lui présentons, il modifie, généralement de manière spontanée et sans intervention de notre part, l'écriture et la représentation concrète.

Mélissa, qui, rappelons-le, est l'autre élève qui a bien réussi dans la séquence d'enseignement, gère cet aspect avec moins de facilité. Au début, elle reconnaît correctement que la mise en place du signe = n'est pas possible. Par la suite, elle change un des aspects, mais oublie souvent d'en faire autant pour l'autre. Cependant, cet oubli n'est pas attribuable à une mauvaise compréhension de Mélissa, puisqu'une intervention minime est suffisante pour redresser la situation. En même temps, l'aspect que Mélissa choisit de traiter en premier nous fournit des informations intéressantes sur sa façon d'aborder ces activités. En effet, au début de la séquence d'enseignement, Mélissa modifie d'abord la situation concrète, tandis que, vers la fin, en traitant des structures plus complexes, elle adapte en premier l'écriture. Nous pouvons donc supposer que Mélissa travaille essentiellement au niveau de la représentation concrète au début de la séquence d'enseignement. Par contre, vers la fin de la séquence, elle semble s'être détachée des objets concrets, pour aborder l'activité par son aspect formel.

Caroline pour sa part, notre élève la plus faible, éprouve encore des difficultés importantes avec ces activités. Comme nous l'avons déjà mentionné, elle n'arrive pas à identifier des fausses égalités comme telles. À chaque fois que ces structures apparaissent dans la séquence, elle les accepte, en se basant sur la forme de la structure. Par exemple, après avoir traité des égalités de structure "a = b + c", elle admet également des fausses égalités de même type, en basant son argumentation sur la forme de l'énoncé, et non pas sur les valeurs numériques impliquées. Afin d'illustrer ces constats, revenons sur les réactions de Caroline lorsqu'elle est confrontée à "8 __ 4 + 3" ainsi que sa représentation concrète sous forme de comparaison :

> "On peut le mettre, parce que, quand tu fais 3 + 4, c'est la même chose que 8, même si le 3 + 4 est ici (en arrière du signe =) et le 8 ici (avant le signe =), ça ne dérange pas. Si je le fais comme ça (montre 4 + 3 = 8) ou comme ça (montre 8 = 3 + 4), égale 8, c'est la même chose que 8."

En principe, Caroline accepte des structures de type "a = b + c". Son argumentation erronée repose sur la forme de l'énoncé plutôt que sur les valeurs numériques impliquées.

Les difficultés de Caroline persistent lorsqu'elle doit transformer ces exemples en égalités. Dans ce cadre, Caroline montre la plupart du temps des réactions similaires à celles de Mélissa. Ainsi, il lui arrive de modifier un des aspects, tout en oubliant de changer l'autre. Il est intéressant de noter que Caroline aborde systématiquement l'aspect concret en premier. Contrairement à Mélissa, elle n'arrive donc pas à se détacher des manipulations concrètes vers la fin de la séquence d'enseignement.

Cependant, on retrouve également chez Caroline des réactions qui traduisent une difficulté plus importante à relier une écriture à une situation concrète. Ceci est le cas lorsque Caroline doit décider si la mise en place du signe = est appropriée dans "9 __ 1 + 7", présenté sous forme écrite et représenté comme comparaison. Après avoir établi qu'on ne peut pas mettre le signe =, Caroline modifie la situation concrète en ajoutant un jeton à l'ensemble de 7 jetons. Cependant, elle continue d'accepter l'écriture sans apporter les modifications qui s'imposent : "*9 = 1 + 7, c'est correct.*"

En résumé, nous pouvons donc conclure que la gestion simultanée de l'écriture et de la représentation concrète, lorsqu'il s'agit de transformer des fausses égalités en égalités, n'est pas évidente pour tous les élèves. Si, chez Mathieu, les difficultés sont rares, ce sont surtout des oublis qui font en sorte que Mélissa est moins performante à ce niveau. Par contre, chez Caroline, élève la plus faible, des difficultés importantes de compréhension apparaissent, surtout au niveau de la reconnaissance des fausses égalités, et, de manière plus isolée, dans la gestion simultanée de l'écriture et de la représentation concrète.

CHAPITRE 7
CONCLUSION

Cette dernière partie de notre thèse doctorale comporte quatre volets. Dans une première partie, nous allons brièvement résumer notre recherche. Nous allons dégager, dans une deuxième partie, les résultats majeurs générés. Une troisième partie servira, par la suite, à discuter des implications didactiques de ces résultats. Finalement, une quatrième partie exposera les limites de notre recherche et ouvrira sur différentes pistes de prolongement pour d'autres travaux sur la compréhension du signe =.

RÉSUMÉ DE LA RECHERCHE

Avant de discuter des résultats obtenus, cette section a deux objectifs : rappeler la problématique qui était à la base de notre travail, et résumer la méthodologie employée.

En apprenant le nombre et les premières opérations arithmétiques durant la première année d'études du primaire, de nombreux élèves ont des difficultés à comprendre le signe =. Une grande majorité de ces enfants considère ce symbole, non pas comme un indicateur d'une relation d'égalité et d'équivalence, mais comme un opérateur, après lequel il faut écrire une réponse à l'opération qui le précède. Cette représentation, renforcée par la présence prédominante d'équations de structure "a + b = __" dans les manuels de mathématiques, engendre principalement deux types de difficultés : ces enfants n'acceptent souvent pas des égalités non conventionnelles, et ils ne sont pas en mesure de compléter correctement des équations qui ne correspondent pas à la structure "a + b = __".

Dans la présente recherche, dont l'objectif principal était de décrire le processus de compréhension du signe = auprès d'élèves de première année du primaire, nous avons conçu et présenté une séquence d'enseignement de ce symbole à six enfants dans le cadre d'une expérimentation didactique. Au début de la collecte de données, onze enfants d'une classe de première année de la ville de Luxembourg ont été soumis à un prétest, afin d'évaluer leur compréhension du signe = et de sélectionner trois participants. Par la suite, un enseignement individuel sur le signe =, de six à neuf séances d'une demi-heure, a été dispensé à ces six enfants.

Plusieurs principes ont servi à l'élaboration des activités d'enseignement. Tout d'abord, les activités ont été basées sur une analyse conceptuelle des relations d'équivalence et d'égalité à l'aide du modèle de Bergeron et Herscovics (1988). Ensuite, lors de l'élaboration des activités d'enseignement, nous avons essayé d'établir un lien entre l'écriture mathématique et la représentation concrète. Dans ce cadre, deux types de représentations ont été considérés, à savoir la comparaison et l'inclusion. Finalement, nous avons travaillé avec les enfants à la fois l'évaluation d'égalités et la détermination d'une inconnue dans une équation.

Plusieurs jours après la fin de la collecte de données, un post-test, proposant des tâches de nature similaire à celles du prétest, nous a permis de vérifier l'étendue des apprentissages réalisés par les six participants. Rappelons également que la progression de trois de ces enfants dont un fort, un moyen et un faible, ont fait l'objet d'analyses approfondies pour les fins de notre recherche.

RÉSULTATS MAJEURS

Notre recherche doctorale a généré plusieurs constats importants concernant l'apprentissage du signe =. Dans la partie qui suit, nous allons les regrouper en trois parties : les erreurs des enfants au début de leur apprentissage du signe =, la possibilité pour des enfants de première année de faire progresser leur compréhension du signe = et les profils d'élèves qui favorisent ou non l'apprentissage du signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence.

1. Erreurs des enfants en début de première année

Tout d'abord, notre prétest auprès de l'ensemble de la classe de première année, dans laquelle nous sommes intervenus, nous a permis de constater qu'une conception du signe = comme opérateur y était généralisée. Aucun des 11 enfants de cette classe soumis au prétest n'a considéré de manière cohérente ce signe comme un indicateur d'une relation d'égalité. Ce constat ne surprend pas, puisque toutes les recherches[12] qui ont investigué la compréhension du signe = en sont venues à des conclusions similaires. De plus, ce phénomène ne se limite pas au début de l'apprentissage du nombre et des opérations arithmétiques, mais se prolonge souvent au-delà de l'école primaire.

Chez les enfants qui ont participé à notre recherche, cette conception du signe = comme opérateur a des répercussions importantes, dès qu'ils sont amenés à travailler différentes équations non conventionnelles. Au départ, tous les élèves en question refusaient des égalités qui ne correspondaient pas à une structure "a + b = c". Un phénomène analogue se retrouve d'ailleurs dans toutes les recherches qui ont évalué la compréhension du signe = auprès d'enfants du primaire. En effet, comme nous l'avons dégagé dans le cadre de notre problématique, les conceptions des enfants à l'égard du signe = et les erreurs qui en découlent sont bien connues par les chercheurs dans le domaine. De plus, les erreurs observées par les différents chercheurs se ressemblent d'une recherche à l'autre, mais aussi à des moments différents de l'apprentissage.

Une seule structure non conventionnelle semble inciter un certain nombre d'enfants à considérer le signe = comme un indicateur d'une relation : ce sont les égalités de structure "a = a". En effet, nous avons constaté que, tout comme les enfants de la recherche de Labinowicz (1985) et de Daneau et al. (2000) certains participants acceptent cette égalité en se basant sur une signification comme indicateur de relation du signe =. Ce phénomène pourrait être attribué au fait que la seule occasion qui permet aux enfants d'avoir un enseignement explicite du signe = au Luxembourg implique de telles structures. En effet, c'est lorsque les enfants doivent comparer différentes quantités et qu'ils sont amenés à insérer les symboles "<", ">" ou "=" entre deux nombres qu'on parle explicitement de la signification de ce signe.

Chez nos participants, une conception erronée du signe = entraîne également des difficultés lors de la résolution d'équations non conventionnelles. Dans ce cas, ces enfants ont essayé, lors du prétest, à ramener différentes équations,

[12] Citons, à titre d'exemple, les travaux de Falkner et al. (1999), Carpenter et Levi (2000), Saenz-Ludlow et Walgamuth (1998), Vance (1998), Behr, Erlwanger et Nichols (1983)

qui ne correspondent pas à une structure conventionnelle, à "a + b = c" par deux stratégies également mentionnées dans les différentes recherches sur la compréhension du signe =. La première de ces stratégies consiste en une lecture à l'envers de l'équation en question et permet de rendre des équations de structure "a = b + c" cohérentes avec une conception du signe = comme opérateur. La seconde stratégie est appliquée surtout aux équations de structure "a + b = c + d", et elle consiste à faire en sorte que le nombre qui suit immédiatement le signe = corresponde à la somme des nombres qui précèdent le signe =. Tout comme pour la lecture à l'envers, l'emploi de cette stratégie, également relevée par les autres recherches sur la compréhension du signe =, permet donc à l'enfant de rester cohérent avec sa conception de ce signe comme opérateur.

En ce qui concerne la nature des erreurs que nous avons pu décrire, il est intéressant de constater qu'elles concernent essentiellement le langage mathématique. Ceci ne surprend pas, si on sait que la très grande majorité des recherches qui se sont préoccupées des difficultés reliées à l'apprentissage du signe = se sont intéressées au signe =, donc au symbole mathématique qui représente cette relation. En même temps, nous avons pu constater que les difficultés de ces enfants se situent principalement au niveau de la compréhension formelle des relations d'équivalence et d'égalité. En effet, deux des trois enfants avec lesquels nous avons travaillé ont eu une compréhension procédurale et abstraite adéquate de ces relations, tandis qu'une élève éprouvait quelques difficultés au niveau de la compréhension procédurale. Nous pouvons donc affirmer que, chez une partie des élèves au moins, les difficultés liées à la compréhension du signe = se limitent à l'aspect formel.

2. Progression de la compréhension du signe = dès la première année d'études

Notre travail avec les élèves de première année d'études a montré qu'il est possible de faire avancer des élèves de cet âge dans la compréhension de ce signe, même si la profondeur des apprentissages réalisés est très différente, selon qu'il s'agit de notre élève la plus faible ou des deux participants plus forts. Nos résultats contredisent donc d'une certaine façon ceux obtenus par Denmark et al. (1976), qui ont enseigné le signe = à des enfants de première année d'études à l'aide d'une balance et de représentations de différentes situations sous forme de comparaison.

À la suite de cette expérimentation, cet auteur a conclu que les enfants de première année n'ont pas la maturité cognitive nécessaire pour attribuer au signe = une signification comme indicateur d'une équivalence. Nos conclusions rejoignent par contre les études plus récentes de Falkner et al. (1999), Carpenter et Levi (2000) ainsi que de Behr, Erlwanger et Nichols (1983) qui en sont arrivés à la conclusion que leur enseignement du signe = en première année permettait aux enfants de cheminer vers une compréhension plus adéquate de ce signe.

Ostensibles chez tous les participants à notre recherche, les progrès ne sont pas faciles à réaliser. Nous avons constaté que l'apprentissage du signe = est un puissant obstacle cognitif pour des élèves de première année d'études. Trois phénomènes différents nous ont amené à ce constat. D'une part, les enfants sont très réticents au départ à accepter une autre signification du signe = que celle qu'ils se sont construite. D'autre part, ils effectuent de nombreux retours vers leur ancienne compréhension du signe = tout au long de la séquence. Finalement, deux de nos trois élèves ont eu tendance à retourner vers une conception du signe = comme opérateur.

En ce qui concerne le premier de ces phénomènes, Saenz-Ludlow et Walgamuth (1998, p. 185) ont constaté auprès d'enfants de troisième année que ceux-ci ont beaucoup de difficultés à se détacher de leur conception initiale du signe = comme opérateur, défendant même leur point de vue de manière assidue : « The dialogues and the arithmetical tasks on equality indicate these children's intellectual commitment, logical coherence and persistence to defend their thinking unless they were convinced otherwise. »

D'ailleurs, un phénomène qui pourrait être relié au retour vers une conception comme opérateur est soulevé par Baroody et Ginsburg (1983). Ces chercheurs ont relevé, après avoir enseigné le signe = à des enfants de la première à la troisième année à partir de la symbolisation uniquement, que les enfants ne considéraient pas le signe = comme indicateur d'une équivalence dans toutes les équations. Ces enfants acceptaient les structures qui leur avaient été présentées au cours de l'expérimentation, tandis que, souvent, ils refusaient des égalités qui revêtaient une structure différente, surtout nouvelle. Nous avons constaté un phénomène similaire auprès de nos trois participants. Cette hypothèse est renforcée par les travaux de Labinowicz (1985) auprès d'enfants de deuxième année d'études.

Falkner et al. (1999), après avoir enseigné la signification du signe = à l'aide d'égalités de structure "a = b + c" aux enfants de leur classe de préscolaire, ont constaté que cet apprentissage ne permet pas à ceux-ci d'attribuer la même signification au signe = dans des structures jusque là inconnues aux enfants. Lorsque les mêmes enfants sont confrontés à une égalité de structure "a = a", ils admettent qu'il s'agit deux fois de la même quantité, tout en refusant d'écrire une telle équation.

Un autre aspect important relié à la fragilité des apprentissages des élèves est apporté par les recherches de Carpenter et Levi (2000), visant à enseigner le signe = à des enfants de première année d'études. Les apprentissages concernant le signe = réalisés par ces enfants semblent ne pas être stables dans le temps. Un certain nombre d'enfants, qui lors de la première partie de l'enseignement étaient en mesure d'utiliser le signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence dans différentes situations, n'ont pas su retenir une partie de ces apprentissages. Quelques mois après l'enseignement explicite du signe =, une partie d'entre eux était retourné vers une conception du signe = comme opérateur lorsqu'il s'agissait d'évaluer une égalité de structure "a + b = c + d".

3. Caractéristiques de l'apprentissage du signe =

L'analyse de notre expérimentation avec trois élèves de première année nous a également permis de dresser le profil de nos participants et de dégager différentes caractéristiques des élèves. Ainsi, la présence d'une compréhension procédurale développée est un des facteurs les plus importants qui distingue les élèves qui ont su modifier leur conception du signe = du sujet qui a rencontré plus de difficultés. Mais, il ne suffit pas d'avoir une compréhension adéquate, l'étendue de cette compréhension semble également jouer un rôle. En effet, c'est la participante qui a développé le plus grand nombre de stratégies additives différentes qui a réalisé la meilleure performance dans la séquence d'enseignement, performance d'autant plus étonnante que l'enseignante de la classe l'avait classifiée comme une élève moyenne.

L'importance des différentes structures additives s'est d'ailleurs également manifestée d'une autre manière. En effet, une des caractéristiques de Mélissa est qu'elle est la seule à être en mesure de se servir d'une soustraction lorsqu'elle doit compléter différentes équations. Or, cette stratégie, qui demande aux enfants des procédures cognitives complexes et un certain détachement du matériel, se retrouve chez l'élève qui a le mieux réussi.

À l'opposé, des difficultés importantes dans la compréhension procédurale du nombre, de l'addition et des relations d'équivalence se traduisent par des difficultés plus importantes lors de l'apprentissage du signe =. Nous avons pu constater que c'est entre autres une compréhension procédurale déficiente qui empêche Caroline d'obtenir de meilleurs résultats lors de la séquence d'enseignement. À l'inverse, une compréhension procédurale adéquate constitue donc un des facteurs principaux qui sont indispensables aux enfants pour réussir à modifier de manière durable leur conception du signe =.

Finalement, un dernier élément qui semble jouer un rôle significatif dans l'apprentissage du signe = est la capacité des enfants d'établir un lien entre une égalité ou une équation et sa représentation concrète. Mélissa et Mathieu, qui ont bien réussi dans la séquence d'enseignement, manipulent facilement cet aspect. Par contre, Caroline éprouve des difficultés tout au long de la séquence, l'établissement à établir un lien entre l'écriture et le concret.

IMPLICATIONS DIDACTIQUES

Dans le cadre de notre recherche doctorale, nous avons enseigné la signification du signe = à des enfants de première année. Cet enseignement s'est déroulé sous forme clinique. L'enseignement était individualisé, et le suivi offert à l'élève était par conséquent beaucoup plus important qu'il ne pourrait l'être sous des conditions « normales » d'enseignement. Malgré cette limite, plusieurs implications didactiques peuvent être dérivées de notre recherche.

1. Pas d'apprentissage du signe = sans enseignement explicite

Tout d'abord, l'enseignement antérieur que les enfants ont reçu en classe sur les nombres et les structures additives ne leur a pas permis de développer une compréhension du signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence. En effet, tous les enfants, avec lesquels nous avons effectué le prétest, c'est-à-dire l'ensemble des 11 enfants de la classe, considèrent le signe = comme opérateur. Malgré de légères nuances, nous pouvons affirmer que l'erreur est généralisée.

L'enseignement des structures additives qui a été dispensé aux enfants de cette classe est influencé essentiellement par deux caractéristiques. D'une part, ce sont surtout des équations de structure "a + b = c" qui leur sont présentées, ces structures étant largement dominantes dans les manuels luxembourgeois. Ce n'est que très rarement que les enfants sont confrontés à d'autres structures et si c'est le cas, c'est la plupart du temps sous forme de comparaisons de nombres, pour lesquelles les enfants doivent décider lesquels des signes "<", ">" ou "=" ils doivent placer entre deux nombres. D'autre part, le signe = n'est pas enseigné explicitement dans le contexte de différentes structures additives. Certes, quand on demande aux enfants si on peut mettre le signe = entre deux nombres, c'est clairement une signification comme indicateur de relation d'égalité qui est expliquée aux enfants. Cependant, cette explication n'est pas explicitement abordée dans le contexte de différentes structures additives.

Un premier constat s'impose donc quant à l'apprentissage du signe = dans un contexte scolaire : Un enseignement basé presque exclusivement sur des équations de structure "a + b = __", combiné à une absence d'explication du signe =, ne permet pas aux enfants de construire une compréhension adéquate de ce signe.

2. Confrontation des enfants à leur conception erronée

Chez les enfants avec lesquels nous avons travaillé, la conviction que le signe = doit être suivi d'une réponse à une question qui le précède est très fortement ancrée. Trois éléments nous ont amené à établir ce constat. Premièrement, ces enfants ont beaucoup de difficultés à accepter une autre signification du signe = au début de la séquence d'apprentissage. Les réticences chez une des participantes allait jusqu'à mettre en doute les explications du signe = que nous lui fournissions. Deuxièmement, les enfants ont tendance à retourner vers leur ancienne conception du signe = tout au long de la séquence d'enseignement. Cette tendance est présente, à divers degrés, chez tous les participants, et ne s'estompe que graduellement chez les plus forts, tandis qu'elle persiste chez l'élève la plus faible. Les enfants ont donc de la difficulté à se débarrasser définitivement des conceptions erronées concernant ce signe. Troisièmement, les apprentissages réalisés à propos du signe = sont très fragiles. Ainsi, nous avons constaté lors du post-test, une dizaine de jours à peine après la fin de la séquence d'enseignement, que deux des trois enfants avec lesquels nous avons travaillé ont déjà commencé à régresser vers leur ancienne conception du signe =. Certes, si ce recul est net chez l'élève la plus faible, il est beaucoup moins évident chez l'élève fort et absent chez l'élève moyen. Il reste cependant qu'une tendance à revenir vers l'ancienne conception du signe = est perceptible.

Au plan didactique, le fort ancrage de la mauvaise compréhension du signe = a certaines implications. Dans ce genre de situations, il ne suffit probablement pas d'expliquer le signe = aux enfants à l'aide de tâches qui leur sont familières. Considérant la tendance des enfants à revenir sur une conception du signe = comme opérateur, un tel essai serait probablement voué à l'échec.

Dans ce contexte, il est probablement plus efficace de confronter les enfants à leur mauvaise compréhension à l'aide d'une activité qui leur est inconnue. Celle que nous avons choisie pour notre expérimentation répond à ces critères. Rappelons que nous y avons d'abord présenté une égalité de structure "a + b = c", accompagnée d'une représentation sous forme de comparaison. A partir de cette structure, les participants devaient déterminer si la même quantité d'objets était présente des deux côtés et si la mise en place du signe = est possible. Par la suite, la représentation concrète ainsi que l'égalité ont été inversées, de manière à obtenir une structure "c = a + b". Nos participants sont généralement en mesure de maintenir le constat d'équivalence au niveau concret, mais leur conception du signe = n'est plus viable dans cette tâche. Si ce type de tâche a donc permis d'ébranler la compréhension erronée des enfants, il a également déclenché une modification de la conception du signe =.

3. Illustration des égalités par une représentation concrète

Si le fort ancrage des mauvaises conceptions à l'égard du signe = nécessite de confronter les enfants à leur erreur, il implique également la mise en relation de la compréhension procédurale et de la compréhension formelle. A priori, deux constats sont importants dans ce contexte.

Tout d'abord, ce n'est en principe pas la manipulation du matériel qui pose problème aux enfants. En effet, lors du prétest, seule la participante qui éprouve ultérieurement d'importantes difficultés lors de l'apprentissage du signe = a une compréhension procédurale incomplète de l'addition et de la relation d'équivalence. Ces difficultés se manifestent cependant dans des tâches relativement complexes, et cette participante est, comme les deux autres, en mesure d'établir ou d'infirmer un constat d'équivalence dans différentes situations concrètes. En principe, tous les participants sont en mesure de déterminer si la même quantité est présente des deux côtés dans différentes situations.

Ensuite, c'est surtout au niveau de la compréhension formelle et, par conséquent, de l'écriture formelle que les élèves ont des difficultés. Comme nous l'avons constaté lors du prétest, les élèves ne « pensent » pas en termes d'équivalence lorsqu'ils sont face à une égalité ou à une équation. Ils ne sont donc pas en mesure d'établir un lien cohérent entre la représentation concrète, d'une part, et l'écriture, d'autre part.

Afin de permettre aux enfants d'établir ce lien, nous avons décidé d'accompagner les égalités de différentes formes de représentations concrètes. Il est fort probable que cette décision s'est avérée pertinente dans le cadre de notre séquence d'enseignement. Deux aspects peuvent contribuer à justifier ces propos : la capacité des enfants à construire un lien entre la représentation concrète et l'égalité, et leur facilité à se détacher de la représentation concrète vers la fin de la séquence.

En ce qui concerne le premier de ces éléments, rappelons que, si les enfants n'ont pas réussi à établir un lien entre une égalité et sa représentation concrète lors du prétest, ils ont fait des progrès importants dans ce domaine au cours de la séquence d'enseignement. Ce sont surtout Mathieu et Mélissa, ayant une bonne compréhension procédurale au départ, qui ont réussi à établir ce lien de manière convaincante au cours de la séquence d'enseignement. Nous avons cependant constaté des différences dans le degré de difficulté des différentes structures : il était plus difficile pour les enfants de relier une représentation sous forme inclusive à une écriture de structure "a + b = c" qu'il n'a été le cas pour des représentations sous forme de comparaison du même type d'égalités.

Dans ce contexte, l'utilisation de contextes de représentation différents, c'est-à-dire à la fois sous forme de comparaison et d'inclusion, semblent être un élément important. Une partie des résultats de la recherche de Denmark et al. (1976) peut contribuer à corroborer ce constat. Ce chercheur a enseigné le signe = à des enfants de première année pendant la période de novembre à avril, en les confrontant à l'écriture des égalités et des équivalences ainsi qu'à une représentation concrète sous forme de comparaison. Cette représentation était systématiquement réalisée à l'aide d'une balance à deux plateaux sur laquelle les enfants mettaient le nombre d'objets correspondant aux nombres à droite et à gauche du signe =. Or, lors du post-test effectué à la fin de l'année scolaire, uniquement un des six enfants qui ont participé à la recherche établissait une relation entre la position de la balance et la possibilité d'inscrire le signe = dans l'égalité qui accompagnait la représentation concrète. De même, seulement deux de ces enfants ont compris le lien qui reliait la représentation concrète à l'aide de la balance à l'égalité correspondante. Dans ce contexte, une représentation concrète uniquement à l'aide de situations de comparaison ne s'est pas avérée efficace. Or, comme dans notre recherche l'établissement du lien entre la représentation concrète et l'écriture formelle semblait plus facile pour les enfants, il est possible que ce soient les types de représentations concrètes utilisées qui aient contribué à faciliter l'établissement de ce lien. En effet, au niveau de la représentation concrète, deux aspects distinguent notre recherche de celle de Denmark et al. (1976). D'une part, nous n'avons pas eu recours à une balance à deux plateaux pour représenter les différentes équations et égalités, parce qu'une telle balance permet uniquement la représentation sous forme de comparaison. D'autre part, nous avons également considéré des situations d'inclusion.

Un deuxième aspect qui pourrait justifier la présentation simultanée d'une écriture et de sa représentation concrète est l'importance des apprentissages réalisés par certains de nos participants qui, lors du prétest, n'ont pas été en mesure de résoudre différentes équations non conventionnelles, à partir de l'écriture uniquement. La situation a été différente lors du post-test pour les deux enfants qui ont bien réussi dans notre séquence d'enseignement. En effet, après leur avoir enseigné comment résoudre ce type d'équations lorsqu'elles ont été accompagnées d'une représentation concrète, ils ont été en mesure d'effectuer le même type d'opérations sans avoir recours au matériel concret. Ce recours au matériel concret n'a donc pas empêché les enfants de s'en détacher, une fois leur conception du signe = modifiée.

Au plan de l'enseignement du signe = dans le contexte de classe, il pourrait donc s'avérer intéressant de combiner une égalité à sa représentation concrète. Cet aspect devrait être assez facile à réaliser, puisque, de toute façon, les activités de manipulation sont nombreuses en première année. Au plan de l'organisation de la classe, elles ne devraient donc pas poser des problèmes insurmontables.

4. Conditions nécessaires à l'enseignement du signe =

Suite à notre séquence d'enseignement, on peut se poser la question s'il est possible et utile d'enseigner le signe = à des enfants de première année, et sous quelles conditions. Un premier constat concernant les apprentissages des enfants dans ce contexte s'impose : L'enseignement du signe = aux trois participants n'a pas eu de conséquences négatives manifestes sur aucun de nos participants. Il n'a pas perturbé ou mis en péril différents acquis des enfants. Même en première année, l'enseignement du signe = et le travail avec différents types d'égalités et d'équations ne nuit donc pas aux apprentissages des enfants.

Conséquence positive surtout, les résultats obtenus nous ont permis de conclure que l'enseignement du signe = a été efficace et bénéfique pour deux des trois participants. En effet, Mélissa et Mathieu, évalués comme des élèves respectivement moyen et fort lors du prétest, ont fait des apprentissages significatifs en ce qui concerne leur compréhension du signe =. Les progrès de Caroline, par contre, sont beaucoup moins convaincants, du fait, entre autres, d'une compréhension procédurale insuffisante. Conformément à l'hypothèse que nous avons formulée, une compréhension procédurale adéquate du nombre, de l'addition et de la relation d'équivalence est pourtant indispensable pour cheminer dans l'apprentissage du signe =.

Cette hypothèse soulève plusieurs questions au plan didactique, que nous allons traiter dans les paragraphes suivants. Ainsi, on peut se demander si l'introduction du signe = en début de première année n'est pas prématurée, et quel est le moment opportun pour procéder à un enseignement plus explicite du signe = aux enfants.

Actuellement, le signe = est introduit en première année et au cours des premiers mois de l'école primaire au Luxembourg, dans le cadre de deux types d'égalités. Il est fréquemment utilisé dans des égalités de structure "a + b = c", et, plus rarement, présenté dans le contexte d'égalités de structure "a = a". Or, pour nous la question essentielle est de savoir si la compréhension procédurale du nombre, de l'addition et des relations d'équivalence et d'égalité des enfants est suffisamment développée au moment de l'introduction du signe =. Question d'autant plus justifiée qu'il s'est dégagé de notre recherche que c'est une compréhension procédurale adéquate qui distingue les enfants qui sont arrivés à modifier leur conception du signe = de ceux qui n'ont pas réussi. S'il se confirme que la compréhension procédurale est requise, la plupart des enfants ne seraient pas encore en mesure, à cette période de l'année scolaire, de développer une compréhension adéquate du signe =. Ne serait-il donc pas plus logique de reporter l'introduction du signe = dans le temps, afin de donner aux enfants la chance de développer davantage leur compréhension procédurale avant d'être confrontés à une formalisation avancée ?

Notre séquence d'enseignement, axée conjointement sur l'écrit et le concret, n'a pas réussi à faire avancer Caroline de manière durable, ni dans sa compréhension procédurale, ni dans sa compréhension formelle. Deux questions s'en dégagent : Est-ce qu'il n'aurait pas fallu travailler en priorité sur le plan concret avec cette élève, au lieu d'essayer de lui expliquer la signification du signe = ? Est-ce que le constat ne s'applique pas à tous les élèves lors de l'introduction du signe = au début de la première année, face à une compréhension procédurale probablement limitée ?

Une compréhension procédurale avancée et l'utilisation d'un grand nombre de stratégies additives sont caractéristiques pour des élèves qui ont bien réussi dans notre séquence d'enseignement. Ceci est particulièrement vrai pour Mélissa, qui lors du prétest fait déjà preuve de sa capacité à se servir d'une grande variété de stratégies additives. Or, si cette manière de procéder facilite effectivement l'apprentissage du signe =, ne serait-il pas approprié de laisser les enfants développer différentes stratégies additives avant de leur demander d'attribuer à ce signe la qualité d'indicateur de relation. Serait-il donc plus pertinent de travailler spécifiquement, et de manière plus soutenue, différents aspects de la compréhension procédurale qui prépareront les enfants à compléter, plus tard, différentes équations non conventionnelles ? D'ailleurs, Denmark et al. (1976) avaient déjà formulé une recommandation allant dans le même sens après une expérimentation didactique sur le signe = auprès d'enfants de première année du primaire. Il a suggéré de remplacer le signe = par un autre symbole, par exemple une flèche, jusqu'à ce que les enfants soient en mesure de comprendre le signe = comme un indicateur d'une relation. Pour sa part, Labinowicz (1985) recommande de retarder l'introduction du signe = jusqu'en deuxième année du primaire, et de développer entre-temps les connaissances des enfants sur le nombre et les opérations de base.

Retarder l'introduction du signe = pourrait contribuer à éviter que les enfants s'en construisent une représentation erronée comme opérateur. Évidemment, une telle mesure ne doit pas empêcher les enfants de travailler différents aspects de la compréhension du nombre et de garder des traces de leurs démarches. Dans cette approche, l'écriture formelle comme égalité pourrait cependant, dans un premier temps, être remplacée par une autre écriture, éventuellement sous forme schématisée.

Le report en tant que tel est-il suffisant ? Saenz-Ludlow et Walgamuth (1998) semblent indiquer que, même auprès d'élèves plus âgés, l'apprentissage du signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence constitue un obstacle cognitif important. Ces auteurs ont réalisé une expérimentation didactique sur le signe = auprès d'enfants de troisième année. Une des spécificités de ces enfants était que, au cours des deux premières années de scolarisation, ils n'ont été que très peu confrontés au signe =. Les opérations que les enfants devaient effectuer n'impliquaient pas l'utilisation du signe =, mais leur demandaient plutôt une notation verticale, dans laquelle une barre séparait les deux nombres à additionner ou à soustraire de la somme ou de la différence. Cependant, même pour ces enfants, qui ont eu moins d'occasions à se construire une conception erronée, l'apprentissage du signe = comme indicateur d'une relation d'équivalence est resté un processus laborieux. Ce n'est donc pas avec l'âge que l'apprentissage du signe = devient plus facile : l'obstacle cognitif semble être présent quel que soit l'âge et il ne peut pas être attribué uniquement à un effet de maturité cognitive. Il n'en reste pas moins que, pour pouvoir l'apprendre, certains prérequis sont, comme nous avons pu le constater, obligatoires.

Quelle est la période idéale pour introduire le signe = ? Notre recherche a montré que, sept mois après le début de leur scolarisation, deux de nos trois élèves étaient en mesure de cheminer de manière significative dans l'apprentissage du signe =. Cependant, nous ne sommes pas en mesure de dire si les mêmes élèves auraient éventuellement pu réaliser des progrès similaires quelques semaines ou quelques mois avant notre expérimentation. De même, il est possible que Caroline, qui n'a pas réussi à modifier de manière durable sa conception du signe =, aurait pu réaliser les mêmes apprentissages quelques semaines ou quelques mois plus tard, si sa compréhension procédurale avait été travaillée.

Se pose donc le problème de savoir quelle est la période la plus pertinente pour introduire le signe = ou enseigner ce signe comme indicateur d'une relation d'équivalence, quelle est la période aussi pendant laquelle la très grande majorité des enfants serait réceptive à effectuer ces apprentissages. Malheureusement, notre recherche n'est pas en mesure d'apporter une réponse à cette question. Rappelons cependant que nous avons constaté qu'une compréhension procédurale adéquate semble être essentielle au développement de la compréhension du signe =.

LIMITES DE LA RECHERCHE ET RETOMBÉES

Cette section vise d'abord à dégager les limites de notre recherche, et ensuite à en décrire les prolongements potentiels.

1. Limites

Notre recherche a permis de générer de nouvelles connaissances sur le processus d'apprentissage du signe = et de décrire les profils d'élèves qui réussissent ou qui ne réussissent pas à modifier leur compréhension du signe =. Cependant, elle comporte également certaines limites, que nous décrirons dans cette section.

La séquence d'enseignement a été réalisée avec un échantillon très restreint d'élèves, six en fait. Si nous avons pu décrire de manière très détaillée le processus de compréhension de trois de ces enfants, il s'avère néanmoins difficile d'extrapoler les profils dégagés vers une population plus large, comme l'ensemble des élèves de première année.

La séquence d'enseignement s'est déroulée dans un contexte très spécifique, sous forme d'entretiens individuels, ce qui nous a permis, d'une part, de nous occuper de manière intensive des difficultés rencontrées par les élèves et, d'autre part, d'avoir accès à l'ensemble de leurs démarches, sans l'interférence d'autres élèves. Si cette manière de procéder a donc comporté des avantages indéniables sur le plan de la recherche, elle a également impliqué des désavantages au niveau des retombées. Considérant notre dispositif expérimental, il est plus difficile de prévoir comment se serait déroulé le même apprentissage dans le contexte d'une classe, où l'enseignante n'aurait certainement pas pu s'occuper de manière aussi intensive de chacun de ses élèves.

En ce qui concerne la rétention dans le temps, il est difficile de prévoir l'évolution des enfants à moyen ou à long terme. Nous avons certes effectué un post-test pour évaluer l'étendue des apprentissages réalisés, mais celui-ci s'est situé une dizaine de jours à peine après la fin de la séquence d'enseignement. Or, déjà à ce moment, nous avons pu constater une tendance plus ou moins importante chez certains élèves à retourner vers leur ancienne conception du signe =. Par contre, nous ne sommes pas en mesure de prévoir comment les élèves vont évoluer à moyen et à long terme et à quel point les apprentissages réalisés sont stables dans le temps.

2. Retombées

Si notre recherche a permis de décrire en détail l'apprentissage du signe = chez trois élèves de première année du primaire, de nombreuses questions restent sans réponse et pourraient faire l'objet de recherches ultérieures.

Notre travail nous a permis de cerner certains éléments qui distinguent notre élève faible des deux élèves qui ont bien réussi. Il serait néanmoins intéressant de savoir si les éléments décrits sont effectivement caractéristiques de tous les élèves qui réussissent ou ne réussissent pas à modifier de manière durable leur représentation du signe =.

Dans le même ordre d'idées, nous avons formulé différentes hypothèses quant aux causes qui empêchent les enfants d'aller plus loin dans leur apprentissage du signe =. Là encore, le nombre d'enfants avec lesquels nous avons travaillé n'est pas assez élevé pour que nous puissions établir avec certitude des relations de cause à effet. D'autres recherches s'avèrent donc nécessaires, notamment

- pour déterminer si une compréhension procédurale suffisante est un prérequis indispensable pour que l'ensemble des élèves puissent apprendre le signe =,
- pour définir le rôle que joue la difficulté d'établir un lien entre une égalité ou une équation et sa représentation concrète,
- pour établir la corrélation entre la diversité des stratégies additives et soustractives que les enfants sont en mesure d'utiliser et leur capacité à avancer dans l'apprentissage du signe =.

Dans le cadre de notre recherche, nous avons réalisé une séquence d'apprentissage avec des élèves en fin de première année d'études. Ainsi, nous avons pu établir que deux de nos trois participants ont été en mesure d'avancer significativement dans leur apprentissage du signe =. Cependant, nous n'avons pas pu déterminer quel serait le moment idéal pour introduire ces apprentissages. Nous pouvons nous demander si les deux enfants les plus forts auraient déjà fait des progrès similaires quelques mois avant notre expérimentation. D'un autre côté, si la compréhension procédurale de Caroline avait été plus solide, elle aurait peut-être réussi à faire davantage de progrès. Finalement, comme nous n'avons pas pu évaluer la rétention à long terme des apprentissages réalisés, nous ne sommes pas en mesure de savoir si Mathieu et Mélissa sont en mesure de maintenir leurs apprentissages à plus long terme. D'autres études s'avèrent donc nécessaires pour déterminer quels sont exactement les prérequis nécessaires à l'apprentissage du signe = et quel est le moment idéal pour commencer à faire réaliser cet apprentissage aux enfants. Entre autres, il serait intéressant de savoir si des enfants de deuxième ou troisième année du primaire auraient plus de facilité à réaliser les mêmes apprentissages.

Notre intervention auprès des enfants a été ponctuelle. Nous avons travaillé avec eux pendant six semaines la compréhension du signe =, à raison de deux rencontres par semaine. Cependant, une intervention ponctuelle comme la nôtre a le désavantage que les apprentissages se réalisent sur une très courte période, et ne sont plus actualisés à la fin de la recherche. En effet, nous pouvons supposer qu'aucun enseignement explicite du signe = ne s'est effectué en classe après notre intervention. Il serait donc intéressant de savoir comment se passerait l'apprentissage du signe = dans le cadre d'une démarche où cet aspect est traité progressivement et systématiquement, pendant une année entière, à l'intérieur d'une classe. Une telle recherche pourrait être intéressante, puisqu'elle permettrait entre autres de suivre l'évolution, à long terme, et dans le contexte d'une classe, de la compréhension du signe =. En même temps, il serait pertinent d'investiguer si un enseignement systématique de ce signe au cours de plusieurs années peut contribuer à éviter l'apparition de certaines difficultés, notamment lors des premiers apprentissages de l'algèbre.

En guise de conclusion, nous pouvons affirmer que nous avons décrit de manière détaillée l'évolution de la compréhension du signe = de trois enfants de première année d'études. Nous avons pu déterminer que l'apprentissage de ce signe constitue un puissant obstacle cognitif, que même les enfants les plus forts ont de la difficulté à surmonter. Par ailleurs, une compréhension procédurale avancée et la maîtrise de plusieurs stratégies additives et soustractives semblent faciliter l'apprentissage du signe =. D'autres recherches sont cependant nécessaires pour généraliser les résultats obtenus et pour déterminer le moment le plus propice à l'introduction du signe =.

BIBLIOGRAPHIE

Ashlock, R. (1998). *Error Patterns in Computation* (7e éd.). Upper Saddle River, N.J. : Prentice-Hall (1re éd. 1972).

Baffrey-Dumont, V. (1996). Résolution de problèmes arithmétiques par des enfants de 8 ans. *Revue des sciences de l'éducation, 22*(2), 321-343.

Baroody, A. et Ginsburg, H. (1983). The Effects of Instruction on Children's Understanding of the "Equals" Sign. *The Elementary School Journal, 84*, 199-212.

Barth, B.-M. (1993*). Le savoir en construction. Former à une pédagogie de la compréhension*. Paris : Retz.

Beattys, C., Herscovics, N. et Nantais, N. (1990). Children's Pre-Concept of Multiplication : Procedural Understanding. *In Proceedings of the Fourteenth PME Conference* (Volume 3, p. 183-189). Mexico City : Mexico.

Bednarz, N. et Garnier, C. (1996). Children's Development in Solving a Certain Class of Additive Problems in Mathematics : A Didactic Intervention Based on Action. *Learning and Instruction, 6*(2), 131-150.

Behr, M., Erlwanger, S. et Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching, 92*, 13-15.

Behr, M., Erlwanger, S. et Nichols, E. (1976). How children view equality sentences. *PDMC Technical Report No. 3.* Tallahassee : Florida State University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED144-802).

Bergeron, J. et Herscovics, N. (1988). La compréhension de la quantité discrète chez les enfants de maternelle. *Actes de la Douzième Rencontre du International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Veszprém, Hongrie.

Bodin, A. et Capponi, B. (1996). Junior Secondary School Practices. *In* A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick et C. Laborde (dir.), *International Handbook of Mathematics Education* (p.565-614). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Bordier, J. (2001). *Clicmaths*. Laval: Éditions HRW.

Boulet, G. (1993). *The Construction of the Unit Fraction Concept*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, Montréal, Québec.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Carpenter, T., et Levi, L. (2000*). Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades*. (Research Report 00-2). Madison, WI : National Center for Improving Student Learning and Achievment in Mathematics and Science.

Copeland, R. (1974). *How Children Learn Mathematics. Teaching Implications of Piaget's Research*. New York : Macmillan Publishing Company.

Daneau, C., Schmidt, S. et Thivierge-Ayotte, L. (2000). Le rôle de la réflexion collective et de la symbolisation dans le développement de la pensée mathématique d'élèves en difficulté grave d'apprentissage. *Apprentissage et socialisation, 20*(2), 47-69.

Denmark, T. et al. (1976). *Final Report : A Teaching Experiment on Equality* (rapport no PMDC-TR-6). Tallahassee : Florida State University (ERIC no ED 144-805).

Dolle, J.-M. et Bellano, D. (1989). *Ces enfants qui n'apprennent pas. Diagnostic et remédiations.* Paris : Centurion.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 349-380.

English, et al. (2002). *In*: Future Issues and Directions in International Mathematics Education Research. In Lyn D. English: *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Falkner, K. P., Levi, L. et Carpenter, T. P. (1999). Children's Understanding of Equality : A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232-236.

Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre. Du comptage à la résolution de problèmes.* Lausanne : Delachaux et Niestlé.

Francavilla, M. (1993). *Étude des structures multiplicatives au niveau logico-physique chez des élèves du 1er cycle du primaire*. Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Québec.

Habran, L. Linsigh, C. (1979). *Mathématique moderne*. Bruxelles : Labor.

Héraud, B. (1991). *Genèse de la notion de mesures spatiales : construction de la mesure bilinéaire*. Thèse de doctorat non publiée, Université de Montréal, Montréal, Québec.

Herscovics, N. et Bergeron, J. (1989). Analyse épistémologique des débuts de l'addition. *In Actes de la 41e rencontre internationale de la CIEAEM* (p. 155-165). Framières (Belgique) : Centre technique de l'Enseignement de la Communauté française.

Herscovics, N. et Bergeron, J. (1988a). La compréhension du rang chez les enfants de maternelle. *Actes de la Douzième Rencontre du International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Veszprém, Hongrie.

Herscovics, N. et Bergeron, J. (1988b). Un modèle à deux paliers pour décrire la compréhension des mathématiques. Traduction française de An extended model of understanding. *Proceedings of PME-NA –10*. Illinois : Northern Illinois University, Behr, M., Lacampagne, C., Wheeler, M. (éds.).

Herscovics. N, Bergeron, J. et Bergeron, A. (1987a). La connaissance du nombre à la maternelle, une étude longitudinale. Partie 1 : Compréhension intuitive et compréhension procédurale. *Proceedings of the Eleventh International Conference of PME*. Montréal : Bergeron, J., Herscovics, N. et Kieran, C. (édi.).

Herscovics, N., Bergeron, J. et Bergeron, A. (1987b). La connaissance du nombre à la maternelle : une étude longitudinale. Partie 2 : Abstraction et formalisation. *Proceedings of the Eleventh International Conference of PME.* Montréal : Bergeron, J., Herscovics, N. et Kieran, C. (édi.).

Herscovics. N. (1983). La recherche en didactique de la mathématique : ses questions, ses méthodes. *Bulletin AMQ, 23*(1), 11-12.

Jonnaert, P. (1997). *L'enfant géomètre. Une autre approche de la didactique de la mathématique* (2e éd.). Bruxelles : Plantyn (1re éd 1994).

Jonnaert, P. (1994). *Pas à pas sur les chemins du nombre*. Document vidéo édité par le DIES. Belgique : Université Catholique de Louvain.

Kantowski (1978). The teaching experiment and soviet studies of problem solving. In Hatfield. L.L. et Bradbard, D.A (dir.), Mathematical problem solving : papers from a research workshop.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.
Labinowicz, E. (1985). *Learning from Children. New beginnings for teaching numerical thinking.* Menlo Park, California : Addison-Wesley Publishing Company.

Laurence, C. et al. (2000). *Mosaïque.* Montréal : Éditions du Renouveau Pédagogique

Lebel, C. et Pagé, L. (2001). *Intersection. Mathématique 1er cycle, Manuel de l'élève C.* Montréal: Lidec.

Linchevski, L. et Herscovics, N. (1996). Crossing the Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra : Operating on the Unknown in the Context of Equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*(1), 39-65.

Lindvall, C. et Ibarra, C. (1980). Incorrect Procedures used by Primary Grade Pupils in solving Open Addition and Subtraction Sentences. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*, 50-62.

Mevarech, Z. et Yitschak, D. (1983). Student's Misconceptions of the Equivalence Relationship. *In* Hershkowitz, R. (dir.), *Proceedings of the Seventh International Conference of the Psychology of Mathematics Education* (p. 313-318). Rehovot, Israel : Weizmann Institute of Science.

Nantais, N. (1992). *La mini-entrevue : Un nouvel outil d'évaluation de la compréhension mathématique au primaire*. Université de Montréal : Les publications de la faculté des sciences de l'éducation.

Nantais, N., et Herscovics. N. (1990). Children's Pre-Concept of Multiplication : logico-physical Abstraction. *In Proceedings of the Fourteenth PME Conference* (Volume 3, p. 289-296). Mexico City : Mexico.

Nantais, N., Boulet, G., Bergeron, J., et Herscovics, N. (1989). Compréhension logico-physique de la multiplication chez l'enfant. *In Actes de la 41e rencontre* *internationale du CIEAEM* (p.193-198). Framières (Belgique) : Centre technique de l'Enseignement de la Communauté française.

Paillé, P. (1997). La recherche qualitative, sans gêne et sans regrets. Manuscrit non publié, Université de Sherbrooke, Sherbrooke : Québec.

Piaget, J. (1991). *La genèse du nombre chez l'enfant* (7e éd.). Neuchâtel : Delachaux et Niestle (1re éd. 1941).

Saenz-Ludlow, A. et Walgamuth, C. (1998). Third Graders' Interpretation of Equality and the Equal Symbol. *Educational Studies in Mathematics, 35*(2), 153-187.
Saenz-Ludlow, A. (1995). Ann's Fraction Schemes. *Educational Studies in Mathematics, 28*(2), 101-132.

Schön, D. (1994). *Le praticien réflexif. À la recherche du savoir caché dans l'agir professionnel.* Montréal : Les Éditions logiques.

Selter, C. (1998). Building on Children's Mathematics – A Teaching Experiment in Grade Threee. *Educational Studies in Mathematics, 36*(1), 1-27.

Shoecraft, P. (1989). "Equals" Means "the Same as". *The Arithmetic Teacher, 36*(8), 36-40.

Sierpinska, A. (1995). *La compréhension en mathématiques.* Mont-Royal : Modulo.

Steffe, L.P. et Thompson, P. W. (2000). Teaching Experiment Methodology : Underlying Principles and Essential Elements. *In* A. Kelly et R. Lesh (dir.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* London : Erlbaum.

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment : illustrations and implications. *In* E. von Glaserfeld (dir.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (p. 177-194). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Thompson, P. (1993). Quantitative Reasoning, Complexity and Additive Structures. *Educational Studies in Mathematics, 25*(3), 165-208.

Vance, J. (1992). Understanding Equivalence : A Number by Any Other Name. *School Science and Mathematics, 18*(4), 263-266.

Vance, J. (1998). Number Operations from an algebraic perspective. *Teaching Children Mathematics,* 4, 282-285.

Van der Maren, J.-M. (1995). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal.

Vergnaud, G. (1997). L'illetrisme en mathématiques : la définition impossible. *In* Barré-de Miniac, C. et Lété, B. (dir), *L'illetrisme. De la prévention chez l'enfant aux stratégies de formation chez l'adulte*. Bruxelles : De Boeck.

Verschaffel, L. et De Corte, E. (1997). Teaching Realistic Mathematical Modeling in the Elementary School : A Teaching Experiment with Fifth Graders. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 577-601.

Vilette, B. (1996). *Le développement de la quantification chez l'enfant. Comparer, transformer et conserver.* Villeneuve d'Ascq, France : Presses Universitaires du Septentrion.

Weaver, J. (1982). Interpretations of Number Operations and Symbolic Representations of Addition and Subtraction. *In* T. Carpenter, J. Moser, et T. Romberg. (1982). *Addition and Subtraction. A cognitive perspective.* New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.

ANNEXE – AUTORISATION DES PARENTS

Je consens à ce que Laurent Theis travaille avec mon enfant, pendant les heures d'école et à raison de deux rencontres de 30 minutes chacune par semaine. Les entrevues porteront sur des tâches mathématiques et seront enregistrées sur bande vidéoscopique. Il est entendu que l'anonymat sera conservé. Veuillez s'il vous plaît retourner cette feuille à l'école le plus tôt possible.

Nom de l'enfant____

Prénom ____

Date de naissance ____

Nom et adresse d'un ou des parent(s)

____

____

____

Signature d'un ou des parent(s)

____

Date

____

Je vous remercie de votre collaboration

Laurent Theis

Collection *mathèse*

Dirigée par Linda Gattuso

Parus dans la même collection

4 dizaines et 10 unités font 410, pourquoi?
Lucie DeBlois

Fait-on ce qu'on pense quand on enseigne des mathématiques?
Linda Gattuso

Résoudre par X et Y ou par 1, 2, 3? : telle est la question
Sylvine Schmidt

Dessine-moi un bateau : la multiplication par un et demi
Pascale Blouin

Raconte-moi tes calculs d'addition et de soustraction
Cathy Arsenault

Où sont les mathématiques quand on a besoin d'elles?
France Caron

Enseigner les mathématiques au primaire : le quoi ou le comment?
Marie-Pier Morin

Un graphique vaut-il mille nombres?
Omar Rouan

Tout, tout, tout, vous saurez tout sur l'algèbre
Hassane Squalli

Les hauts et les bas de la validation dans la classe de mathématiques au secondaire!
Claudine Mary

À paraître dans la même collection

Moi, je sais compter loin, loin…
Jacinthe Giroux

Pour information

Editions Bande Didactique
Courriel : bande.didactique@internet.uqam.ca

mathèse

Les tribulations du signe = dans la moulinette de la bonne réponse

Que signifie le signe =? La réponse des enfants du début du primaire que nous avons rencontrés dans le cadre de notre travail est unanime : "Ça sert à séparer les chiffres et à écrire la réponse". Le but de notre recherche consiste à décrire comment des enfants de première année du primaire peuvent cheminer vers une compréhension de ce symbole comme un indicateur d'une relation d'égalité. Pour ce faire, nous avons mis en place une expérimentation didactique, au cours de laquelle nous avons enseigné le signe = ainsi que les relations d'équivalence et d'égalité sous-jacentes à travers différentes tâches additives. Les résultats de notre recherche montrent qu'il est possible de faire avancer la compréhension du signe = dès le début de l'école primaire, mais que la compréhension de ce symbole comme un indicateur d'une relation d'équivalence constitue un puissant obstacle cognitif.

Laurent Theis
Professeur de didactique
Département d'enseignement
au préscolaire et au primaire
Université de Sherbrooke
2500, boul. de l'Université
Sherbrooke, (Québec), J1K 2R1
Laurent.Theis@USherbrooke.ca

Éditions Bande Didactique