Synthèse « La Rivière »

Le document suivant est extrait d'un ensemble de ressources plus vastes construites par un groupe de recherche INRP-IREM-IUFM-LEPS.

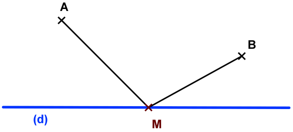
La problématique de ce groupe est centrée sur le questionnement suivant :

en quoi les problèmes de recherche et la dimension expérimentale qu'ils contiennent permettent-ils des apprentissages mathématiques (et pas seulement transversaux) ?

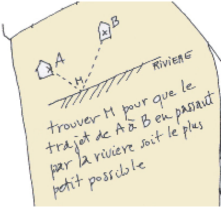
Retour au Menu La Rivière | Lire un résumé à l'écran | Télécharger le texte

Situation : « La Rivière »

Le problème :



Minimiser le trajet AMB



Retour au Menu La Rivière

Suite

1.Analyse mathématique du problème

La situation mathématique consiste à minimiser une somme de distances dans le plan. Elle se place dans le cadre plus général des problèmes d'optimisation en géométrie.

Éclairage historique :

On trouvera des éclairages historiques et anthropologiques dans l'ouvrage Mathématiques et formes optimales, de Stefan Hildebrand et Anthony Tromba, collection Pour la science, Belin, 1985.
Les auteurs y abordent des questions philosophiques, physiques, historiques et mathématiques pour étudier les rapports entre mathématiques et formes optimales trouvées dans la nature.
Il y est question de « problèmes de plus court chemin » (ce qui donne le paysage de notre problème « la rivière »), mais aussi de films de savon, et de problèmes de conception optimale dans la nature, et dans les objets créés par l'Homme.

Retour au Menu La Rivière
Suite

Des méthodes de résolution :

Nous rédigeons les méthodes. Certaines utilisent le cadre analytique : choix d'une variable, étude de fonction et recherche de son minimum ; d'autres le cadre géométrique.
Certaines ne donnent qu'une solution partielle au problème posé.
Pour chacune nous présentons les savoirs mathématiques utilisés, ainsi que les compétences transversales mises en œuvre.

méthodes	savoirs mathématiques utilisés	compétences transversales mises en œuvre
Expérimentation géométrique (très fréquente en classe de collège) :		
En mesurant les longueurs AM et MB et en en faisant la somme, les élèves conjecturent une position M_0 de M rendant le trajet minimal. Cette expérimentation peut être faite avec papier-crayon ou avec un logiciel de géométrie dynamique.	- mesure de longueurs de segments à la règle graduée - calcul de la somme de 2 nombres - comparaison de nombres décimaux	

Remarque : cette méthode est très féconde pour trouver la conjecture, mais il reste à caractériser le point M_0 !

Une recherche expérimentale est en général suivie d'essais de caractérisation de M_0. Mais il arrive que les caractérisations trouvées (milieu des projetés orthogonaux de A et B sur la droite (d) par exemple) ne soient pas elles-mêmes passées au crible de l'expérimentation : il faudrait en effet faire des vérifications dans des cas de figures variés quant à la position de A et B par rapport à la rivière, et beaucoup d'élèves font des vérifications sur des cas de figures stéréotypés, tous très proches...

La conjecture peut être validée (ou invalidée) en utilisant un logiciel de géométrie dynamique

De plus, la conjecture sur la caractérisation de M_0 doit être démontrée.

- expérimenter en faisant varier la position d'un point, à la main (papier-crayon) ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

- conjecturer

- rédiger une conjecture

- vérifier sa conjecture, en prenant l'initiative de faire aussi varier les positions de A et B, pour la valider.

- vérifier une conjecture à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

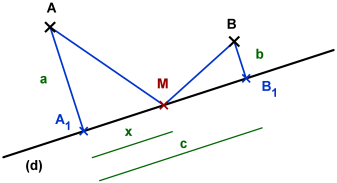
- démontrer une conjecture

Retour au Menu La Rivière

Suite

Résolution analytique :

A_1 et B_1 sont les projetés orthogonaux de A et B sur la droite (d). On appelle x la distance A_1M , a la distance AA_1 et b la distance BB_1. La distance $AM + MB$ se calcule donc, en utilisant le théorème de Pythagore dans les deux triangles AA_1M et BB_1M :



$AM + MB = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(c-x)^2 + b^2}$
et on pose alors : $f(x) = AM + MB$

- utilisation de la lettre pour désigner un nombre

- utilisation du théorème de Pythagore

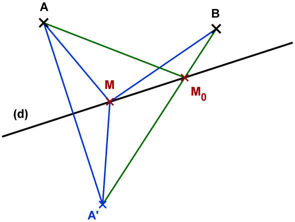
- utilisation du sens de variation d'une fonction pour déterminer un minimum.

- effectuer un changement de cadre : passer du cadre géométrique au cadre fonctionnel.

Pour minimiser le chemin il faut minimiser la fonction f. Pour minimiser la fonction f il faut trouver les zéros de la dérivée de f et faire l'étude du signe de cette dérivée pour conclure au plus petit chemin.

La dérivée de f est donnée par : $f'(x) = \frac{x-c}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$	- calcul de dérivée d'une somme de fonctions et de fonctions du type $\sqrt{u}$	
Alors on cherche les zéros de la dérivée de f, c'est à dire les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ En utilisant une calculatrice et le calcul formel, on obtient $x = \frac{ac}{a+b}$ et $x = \frac{ac}{a-b}$ On peut vérifier que $f'\left(\frac{ac}{a-b}\right)$ n'est pas nul. La solution apparaît formellement dans la résolution de l'équation parce que la machine, pour résoudre une équation du type $\sqrt{A} = \sqrt{B}$ la machine résout $A = B$	- étude du signe d'une expression algébrique - utilisation du calcul formel pour déterminer le ou les zéros d'une fonction	- prendre l'initiative d'utiliser le calcul formel pour déterminer les zéros de la dérivée, puis pour étudier son signe
Maintenant on doit faire l'étude du signe de la dérivée. Si on calcule la dérivée seconde de f en $x = \frac{ac}{a+b}$, on trouve $f''\left(\frac{ac}{a+b}\right) \geq 0$ et donc, on montre que x est le minimum de la fonction, qui permet de donner la distance du plus court chemin $AM + MB$. Pour des élèves de première, on montrera en faisant le tableau de variation et de signe de la fonction dérivée f' qu'elle s'annule et change de signe en $x = \frac{ac}{a+b}$	- utilisation du calcul formel pour déterminer le signe d'une expression - étude du signe de la dérivée f' en utilisant son sens de variation, donc la dérivée seconde f''	- revenir au problème posé : passer du cadre fonctionnel au cadre géométrique, en particulier, se poser le problème de la construction géométrique du point M_0 correspondant à : $x = \frac{ac}{a+b}$
Pour des élèves de seconde, l'observation de la courbe suffira.	- interprétation de la courbe représentative pour la recherche du minimum d'une fonction	

Solution avec la symétrie axiale d'axe (d) :



On considère le point A' symétrique de A par rapport à la droite (d). Alors, comme la symétrie conserve les distances et que M est son propre symétrique puisqu'il est sur la droite (d), on a :
$MA = MA'$ donc $AM + MB = A'M + MB$.

On trace la droite (A'B). Elle coupe la droite (d) en M_0. On a $M_0A = M_0A'$. De plus, d'après l'inégalité triangulaire, on peut dire que :
Quelle que soit la position du point M :
$A'M + MB \geq A'B$
$A'M + MB \geq A'M_0 + M_0B$
C'est-à-dire : $AM + BM \geq AM_0 + M_0B$
Ainsi la longueur du trajet AMB est la plus courte lorsque M est en M_0. Ainsi la position du point cherché est le point M_0 intersection de la droite (A'B) avec la droite (d).

- symétrique d'un point par rapport à une droite

- la symétrie est une isométrie du plan

- inégalité triangulaire

- A, B, C sont alignés dans cet ordre équivaut à : $AB + BC = AC$

- prendre l'initiative d'introduire un nouveau point.

Interprétation physique du problème :

On peut considérer ce problème comme un problème de rayon de lumière et de réflexion sur un miroir ; la solution donne des angles d'incidence et de réflexion égaux ; l'expérience physique peut être faite avec un miroir et un rayon laser en visant B à partir de A et en réfléchissant sur la rivière (d).

- connaissance en physique : la lumière suit le plus court chemin, et aussi l'égalité entre rayon incident et rayon réfléchi.

Il faut ensuite démontrer l'égalité entre le point trouvé par cette méthode, et le point M_0 trouvé par la méthode qui utilise la symétrie orthogonale.

- démontrer que deux méthodes donnent la même solution

On peut aussi s'attacher à démontrer l'égalité entre le point trouvé par cette méthode, et le point M trouvé par la méthode analytique. Il suffit d'utiliser soit la trigonométrie dans les deux triangles rectangles AA_1M et BB_1M , soit le fait que ces deux triangles sont semblables ; on obtient alors : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{A_1M}{c - A_1M}$, soit : $A_1M = \dfrac{ac}{a+b}$

Utilisation du barycentre pour construire le point M qui réalise le minimum :

Une fois obtenue la formule : $A_1M = \dfrac{ac}{a+b}$ (et le fait que M est sur le segment $[A_1B_1]$), il s'agit de trouver une méthode de construction de M (éventuellement autre que celle qui utilise le symétrique de A par rapport à (d)).
M est donc défini vectoriellement par :
$a\overrightarrow{B_1M} + b\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{0}$, ce qui signifie que M est le barycentre du système $\{(A_1, b); (B_1, a)\}$.

- interprétation barycentrique d'une égalité de longueurs

Pour construire le point M, on peut donc :

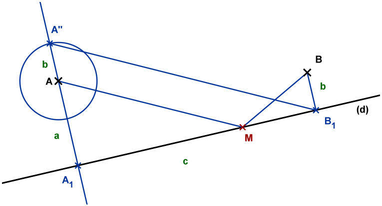
- soit utiliser la construction « standard » qui nous ramène à construire le symétrique de A (ou de B) par rapport à (d), et à considérer le point d'intersection de (d) avec la droite (A'B) (ou la droite (AB')).

- construction du barycentre de deux points

- soit utiliser une construction « d'un seul côté de (d) », qui consiste à mettre l'égalité (obtenue soit par la méthode analytique, soit par celle utilisant les triangles semblables) $A_1M = \dfrac{ab}{b+c}$ sous la forme : $\dfrac{A_1M}{a} = \dfrac{b}{b+c}$

- transformation d'écriture dans une proportion

- conjecturer



$AA_1 = a$; $BB_1 = b$; $A_1B_1 = c$

On démontre (voir méthode analytique, ou celle utilisant les triangles isométriques) que le minimum de $AM + MB$ est obtenu lorsque : $A_1M = \dfrac{ac}{a+b}$

Il est possible de construire M en restant dans le demi-plan de frontière (d) contenant A et B.

- sur la perpendiculaire à (d) passant par A on construit le point A" tel que : $AA" = b$.

- on construit la parallèle à $(A"B_1)$ passant par le point A.

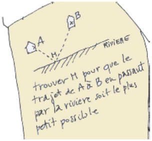
- cette droite coupe (d) en le point M cherché.

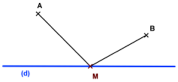
- construction de la quatrième proportionnelle en utilisant le théorème de Thalès

- se poser un nouveau problème

2. Éléments didactiques pour la mise en œuvre en classe

Je dois aller de ma maison à celle de ma grand-mère. Nos maisons sont situées sur la même rive d'une rivière à laquelle je dois en chemin, remplir mon seau. Quel est le plus court chemin ?



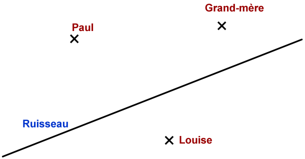


Minimiser le trajet AMB.

Au collège :

Plus court chemin : la grand-mère de Paul et de Louise ne peut plus se déplacer. Ses petits enfants vont chacun leur tour lui porter de l'eau qu'ils puisent au ruisseau. Un jour, c'est Paul qui fait le trajet : il va de chez lui au ruisseau, puise l'eau, puis la porte à sa grand-mère. Le lendemain c'est au tour de sa cousine Louise : elle part de chez elle, va aussi puiser l'eau au ruisseau et la porte à sa grand-mère. Les deux enfants sont toujours pressés et veulent prendre le chemin le plus court.

Pouvez-vous les aider en indiquant sur le plan les chemins qu'ils doivent emprunter ? (les maisons sont représentées par des points et le ruisseau par une droite.)
Paul et Louise ne sont pas d'accord. Paul dit que ce n'est pas juste car de toute façon, c'est toujours lui qui doit marcher le plus. Louise pense au contraire que c'est elle. Qui a raison ?



3.Exemples de mises en œuvre

Les séances en collège et lycée durent environ une heure et demi ou deux heures (une heure pour la recherche, une heure pour la mise en commun). On peut prévoir en première et terminale des calculatrices avec calcul formel et aussi la possibilité d'accès à un logiciel de géométrie dynamique.

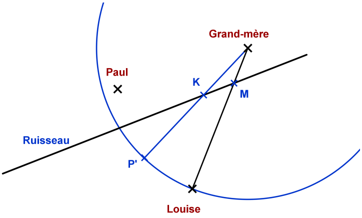
Au collège :

Durée de la séance : une heure de recherche avec une mise en commun à mi-parcours, et relance de la recherche ensuite. Consignes :
le matériel de géométrie et la calculatrice sont autorisées.
Recherche individuelle (5min).
Par groupe de 3 ou 4 (20 min).
Chaque groupe rendra une feuille A3 du plan agrandi sur laquelle il indiquera les chemins à emprunter par Paul et Louise, ainsi que la longueur de chacun d'eux.

Mise en œuvre envisagée :

- Appropriation du problème : les élèves lisent chacun silencieusement l'énoncé, puis il est reformulé par un ou deux élèves, le professeur s'assure en représentant le plan au tableau que chacun s'est approprié le plan de la situation. Puis il lance la recherche individuelle en précisant que chacun doit chercher à répondre d'abord à la première question.
- Recherche individuelle
- Recherche en groupe
- Mise en commun : Après avoir constaté les différences entre les productions, la mise en commun porte sur les procédures utilisées : après l'exposé des groupes le débat devrait permettre d'invalider les procédures fausses et de faire ressortir la lourdeur et l'inefficacité de la procédure par essais. Si une procédure plus experte apparaît, elle sera soumise au débat et si possible justifiée par la classe. Dans un deuxième temps, les différences entre longueurs trouvées pour chacun des enfants devraient montrer la nécessité d'affiner le mesurage et justifier le recours à l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique.

Première synthèse au vidéo projecteur :



A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, le point K pourra d'abord être placé approximativement sur la rivière puis de façon plus précise par essais successifs. On pourra vérifier l'égalité des chemins par comparaison des mesures affichées, ou en déplaçant L le long d'un cercle de centre G et de rayon GL. Dans ce cas, on pourra s'intéresser à la position particulière de L qui permet au segment LM de passer par K, remarquer l'égalité $PK = LK$. Le professeur encouragera les élèves à remarquer alors le positionnement du point L par rapport à P et demandera aux élèves si cette disposition particulière ne leur donne pas une idée pour construire plus rapidement et plus précisément le chemin que Paul devait emprunter.

Nouvelle recherche individuelle

Consignes : trouver le plus rapidement possible mais de façon précise sur ce nouveau plan, le plus court chemin que peut emprunter Emilie pour aller puiser de l'eau, puis la porter à sa grand-mère. Trouver le plus rapidement possible mais de façon précise sur ce nouveau plan, le plus court chemin que peut emprunter Farid (les positions d'Emilie et de Farid sont du même côté que G par rapport à la rivière) pour aller puiser de l'eau, puis la porter à sa grand-mère.
L'enseignant ramasse les productions des 4 ou 5 élèves les plus rapides, valide ou invalide leurs productions au calque.

- Mise en commun et synthèse :

  les élèves ayant réussi expliquent leur(s) méthode(s) au tableau. La classe se prononce sur l'efficacité des méthodes proposées.

- Réinvestissement :

  chacun est invité à réinvestir la (ou une des) méthode(s) retenue(s) par la classe pour compléter la deuxième partie de la fiche qui sera collée dans le cahier et accompagnée d'une trace écrite du type :

  « Pour construire, sur le plan, le plus court chemin que Farid peut emprunter, on peut construire F', le symétrique de F par rapport à la droite et tracer le segment [F'G] qui est le plus court chemin possible pour joindre (F'G). Il coupe la droite en K.
  On a alors : $FK = F'K$ et $FK + KG = F'G$, le chemin F,K,G est de la même longueur que $F'G$ donc le plus court possible. »

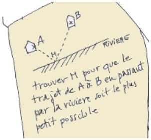
  Remarque : dans le cas où aucune méthode experte apparaîtrait, le professeur pourra soit souligner des éléments de réponse intéressants et relancer une nouvelle fois la recherche.

  Si nécessaire il pourra présenter (comme venant d'une autre classe) et soumettre aux élèves, une méthode permettant d'obtenir K en plaçant approximativement un point E' du côté de la rivière ne contenant pas le point E et en traçant (E'G).

Retour au Menu La Rivière
Suite

Avec des Étudiants qui préparent le concours de Professeurs d'École (PE1)

Les étudiants sont au nombre de 30. Ils préparent le CRPE.
Seulement deux d'entre eux ont fait une terminale scientifique ; il s'agit donc d'une section à dominante littéraire, dont les dernières connaissances mathématiques sont lointaines, et dont les dernières connaissances en géométrie datent de la classe de seconde.
La séance dure 1h 30.
La présentation du problème et la recherche individuelle : 10 minutes
La recherche en sept groupes de 4 ou 5 étudiants : 50 minutes (dont la rédaction de l'affiche). Dans deux salles proches
La mise en commun : 20 minutes
La relance de la recherche par le professeur : 10 minutes
L'énoncé est écrit au tableau par le professeur. Il s'agit de l'énoncé 1 : « trouver M pour que le trajet de A à B en passant par la rivière soit le plus petit possible ».
Le dessin est celui de la rubrique « situation mathématique » (la rivière est dessinée non horizontale)



Les objectifs de cette séance sont les suivants :

- présenter ce qu'est un problème de recherche en en faisant chercher un aux étudiants, plutôt que de faire un cours magistral à ce propos.
- récupérer des éléments pour la séance suivante (qui dégage les caractéristiques d'un problème de recherche, les objectifs didactiques poursuivis, la gestion de la classe, les obstacles à la mise en œuvre, les points positifs, etc.)
- le problème étant posé dans le cadre géométrique, et pouvant faire l'objet d'une construction : effectuer une évaluation diagnostique des étudiants sur les connaissances de géométrie pouvant être mobilisées.
- si des étudiants utilisent une fonction : récupérer leur recherche pour introduire le module « fonction, proportionnalité »

Bilan de cette séance de recherche :

- les étudiants ont bien cherché, se sont pris au jeu.
- plusieurs connaissances de géométrie ont été mobilisées : milieu, médiatrice, projeté orthogonal d'un point sur une droite, plus court chemin d'un point à une droite, construction d'un triangle rectangle connaissant son hypoténuse
- la rédaction des affiches a été longue : les étudiants tenaient à utiliser un vocabulaire mathématique précis, se demandaient quelles notations utiliser.
- en une heure de recherche, personne n'avait trouvé « la » solution. Toutes les constructions proposées étaient fausses.
- j'ai été assez déroutée par ce fait. C'est la première fois que ceci m'arrivait.
- j'ai donc ajouté au scénario prévu une phase de relance de la recherche : je leur ai donné une position de A et B qu'aucun n'avait prise : A loin de la rivière, et B assez près. Cela a permis de vérifier que leur solution ne convenant pas, que leur point M ne réalisait pas le maximum. Ensuite, je leur ai donné une indication : « changeons de problème : à la place de la rivière, mettons un miroir. De la maison A, on braque une torche électrique vers le miroir de façon à ce que la lumière éclaire la maison B ». Je leur explique que la lumière, elle, parcourt le plus court chemin (loi de la physique). Deux étudiants semblent se rappeler cette loi. Je leur demande d'étudier ce nouveau problème pour la semaine suivante, de façon à trouver une méthode de résolution.

- La semaine suivante, une étudiante (seulement) a trouvé : elle a utilisé l'égalité des angles d'incidence et de réflexion puis la trigonométrie ; elle trouve l'expression de A'M en fonction de a, b et c.
- Lors du bilan, la semaine suivante, j'expose un corrigé de ce problème en adaptant sa méthode : je remplace l'outil « trigonométrie » (car il n'est pas au programme de la préparation au CRPE) par le théorème de Thalès, puis je leur montre l'équivalence entre cette méthode et la méthode utilisant la symétrie axiale.

Prolongement :

lors d'une séance consacrée à l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, nous avons repris ce problème, de façon à montrer aux étudiants la richesse des expérimentations possibles, contrairement à celles effectuées avec papier-crayon. J'avais en effet constaté que leurs essais par mesures portaient sur des positions de A et de B proches des positions « marquées sur l'énoncé », et donc souvent ne parvenaient pas à infirmer la conjecture erronée (bien que 4 étudiants par groupe faisant 3 ou 4 dessins chacun, donne, leur semble-t-il, un « grand nombre » d'expérimentations).

Si c'était à refaire, je changerais donc l'environnement de recherche : le matériel proposé serait : papier, crayon, instruments de géométrie et aussi possibilité d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique.
Il pourrait ainsi apparaître des expérimentations (ou investigations) plus nombreuses et surtout plus variées, avec une récolte de mesures plus nombreuses, et donc la possibilité de modéliser par une fonction, dont on étudie le minimum.

Retour au Menu La Rivière

Suite

Avec une classe de Lycée dont tous les élèves sont équipés d'une calculatrice Ti n'spire :

Les élèves commencent à chercher le problème papier/crayon en groupe. Quand ils estiment avoir émis une conjecture un fichier montrant la position de la solution est chargé dans la calculatrice, sans que les constructions n'apparaissent.

Énoncé :

Un cavalier s'apprête à rentrer à l'écurie. Toutefois il doit encore faire boire son cheval à la rivière proche (à cet endroit la rivière coule quasiment de façon rectiligne). Par ailleurs il souhaite économiser sa monture. A quel endroit de la rivière doit-il faire boire son cheval pour avoir la plus petite distance possible lors du trajet de retour à l'écurie ?

1. Les pré-requis mathématiques supposés :

   distance, inégalité triangulaire, symétrie axiale, théorème de Thalès (la réciproque) ;
2. Les pré-requis techniques supposés :

   construction de points libres, intersection, sur objet, droites, segments, perpendiculaires, et déplacement de points.
3. La situation de la séance dans la progression annuelle :

   en début de la géométrie

Retour au Menu La Rivière
Suite

4 Objectifs de la séance

a objectifs mathématiques :

A un niveau méta-mathématique, mise en place d'heuristiques, de raisonnements ; écriture et formalisation d'une conjecture.
Au niveau mathématique : propriété de la symétrie axiale, bissectrice et mesure d'angles

b objectifs techniques :

Maîtrise des commandes élémentaires de l'application géométrie

5 Le scénario de la séance :

première partie du travail papier/crayon : demander une conjecture qui sera contrôlée dans la deuxième partie en utilisant le fichier tns fourni quand les élèves auront proposé une solution.

6 Organisation matérielle :

travail de groupe

7 Forme et localisation de l'énoncé élève (papier seulement)

8 Forme de la production attendue :
une construction géométrique de la solution du problème sur la calculatrice et sur papier crayon

Retour au Menu La Rivière
Suite

LE SCÉNARIO

Ce que fait le prof	Ce que font les élèves	Temps
Consignes : Recherche papier/crayon : Le but de ce problème est de déterminer l'endroit de la rivière où le cavalier doit faire boire son cheval. Mathématiquement, c'est le point M qui est tel que la distance $CM + ME$ soit la plus courte possible en notant C, la position actuelle du cavalier et E la position de l'écurie.	Les élèves ont la première partie de la fiche élève	15'

Ce que fait le prof	Ce que font les élèves	Temps
Recherche d'une conjecture en papier/crayon ; dès qu'un groupe a émis une conjecture, le professeur donne le fichier tns - difficulté attendue difficulté (connue) de trouver une solution dans ce problème	Recherche papier/crayon, en groupe	

Retour au Menu La Rivière
Suite

Ce que fait le prof	Ce que font les élèves	Temps
Mise à l'épreuve de la conjecture sur la calculatrice -difficulté attendue : Sur la machine : difficulté à transposer les recherches papier/crayon sur la machine ; passer d'un dessin aux propriétés caractéristiques de la figure géométrique sous-jacente On peut s'attendre à ce que les conjectures proposées ne soient pas correctes et donc à une nouvelle recherche directement sur la machine.	Transposition des travaux papier/crayon sur la machine puis confrontation avec la solution « boite noire »	

Ce que fait le prof	Ce que font les élèves	Temps
Phase de démonstration institutionnalisation Une phase avec la machine en rétro-projection Une phase sur le tableau	Écriture d'une solution.	
Fin de séance		

Retour au Menu La Rivière