# Synthèse « Une Intersection Inaccessible »

Le document suivant est extrait d'un ensemble de ressources plus vastes construites par un groupe de recherche INRP-IREM-IUFM-LEPS.

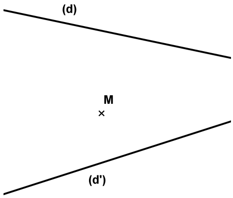
La problématique de ce groupe est centrée sur le questionnement suivant :

en quoi les problèmes de recherche et la dimension expérimentale qu'ils contiennent permettent-ils des apprentissages mathématiques (et pas seulement transversaux) ?

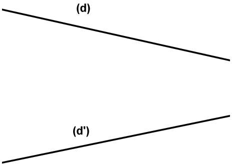
Retour au Menu Intersection Inaccessible | Lire un résumé à l'écran | Télécharger le texte

Deux énoncés pour deux situations assez proches :

Sachant que (d) et (d') ne se coupent pas sur la feuille




Peux-tu tracer la droite passant par le point M et l'intersection de (d) et(d') ?




Peux-tu déterminer l'angle des deux droites ?

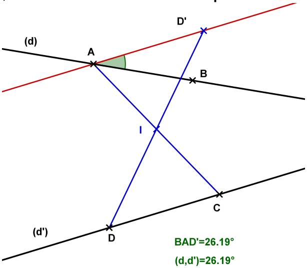
La détermination de l'angle des droites est présentée succinctement ici, mais l'essentiel du développement se fera sur le tracé de la droite passant par un point et par l'intersection inaccessible de deux droites

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible
Suite

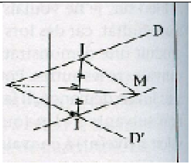
# 1. Analyse mathématique du problème

La recherche de ce problème a fait l'objet de nombreuses productions dans le bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public.
Claude Tisseron, à la suite de plusieurs collègues, a proposé une seizième solution.
Nous en proposons ci-dessous quelques-unes.
En voici une pour la détermination de l'angle, accessible dès la Cinquième :

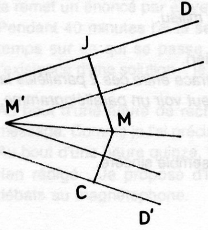
Placer des points A et B sur (d) et des points C et D sur (d').
Soit I le milieu de $[AC]$ et D' le symétrique de D par rapport à I.
La droite (AD') est parallèle à (d') et l'angle $\widehat{BAD'}$ représente l'angle des droites (d) et (d').
En effet les angles alternes-internes $\widehat{BAD'}$ et $\widehat{AOD}$, par rapport à la sécante (AO), sont égaux.



Voici maintenant trois solutions accessibles au Collège pour le tracé de la droite passant par un point du plan et l'intersection inaccessible.
Nous vous renvoyons au corps du texte pour un accès à des solutions plus sophistiquées.
Les deux textes ci-dessous sont des textes d'élèves extraites de l'ouvrage « problème ouvert et situation-problème » de l'IREM de Lyon.

| | |
|---|---|
| Message 1<br>Tracer les parallèles à D et D' qui passent par M (la parallèle à D coupe D'en I ; la parallèle à D' coupe D en J). Rechercher le milieu de [$IJ$] Tracer la droite passant par M et par le milieu de [$IJ$]. |  |

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible
Suite



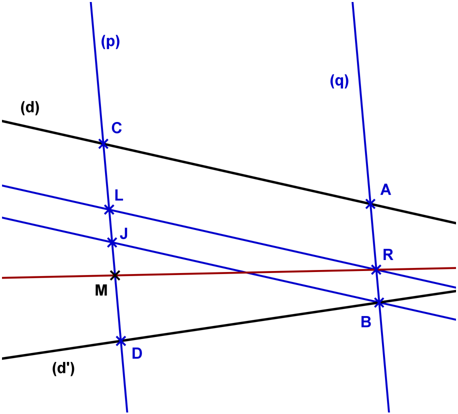

Tracer la perpendiculaire à D qui passe par M, elle coupe D en J .
Tracer la perpendiculaire à D' qui passe par M, elle coupe D'en C.
Tracer la parallèle à D qui passe par le milieu de [MJ]
Tracer la parallèle à D' qui passe par le milieu de [MC]
Ces 2 parallèles se coupent en M'
Tracer la droite (MM').

Et si l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ ne suffit pas , on peut utiliser l'homothétie de rapport $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible
Suite

Et une solution inspirée de travaux d'élèves et dont la preuve peut utiliser le théorème de Thalès :

On trace une droite (p) passant par M coupant (d) et (d') en C et D.
On construit le milieu J de [CD].
On trace une parallèle à (d) passant par le point J.
Elle coupe (d') en B.
On construit une droite (q) parallèle à (p) passant par B et qui coupe (d) en A.
On cherche le milieu L de [CM].
On construit le point R intersection de (q) et de la parallèle à (d) passant par L.
La droite (MR) est la droite cherchée.



# *2. Éléments didactiques pour la mise en œuvre en classe*

## Scénario

Nous proposons ci-dessous un scénario s'appuyant sur la gestion de problèmes ouverts. Michel Mante dans l'ouvrage « les pratiques du problème ouvert » fait les commentaires suivants concernant l'énoncé : « Il m'a semblé important d'inciter dans l'énoncé les élèves à rédiger leur résultat de façon à favoriser la mise en commun (des résultats). J'ai préféré tracer sur l'énoncé les 2 droites et placer le point de façon à ce que tous commencent leur recherche avec la même figure. Cette figure a été construite de façon à ce que toutes les solutions que je connaissais conviennent. D'autre part j'ai évité de placer le point M de telle sorte que la droite à tracer soit une droite particulière : bissectrice de D et D', perpendiculaire au bord de la feuille... »

Une expérimentation en classe de Première L a fait apparaître la pertinence de cette analyse. Elle s'appuyait sur un lancement beaucoup moins cadré de l'activité que nous décrivons plus loin. Les risques évoqués par M.Mante se sont confirmés mais l'utilisation par les élèves de feuilles quadrillées et de mesures ont permis d'espérer d'autres apports.

**Une situation à mettre en œuvre de la quatrième à la terminale en deux à trois heures suivant les niveaux et les objectifs.**

Pour la première séance de 55 minutes, le début de scénario peut être le suivant :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Les élèves<br>se sont installés<br>par groupe de 4 ou 5<br>Ils font face au professeur | Le professeur<br><br>Les élèves | présente le type d'activité<br><br>écoutent et prennent<br><br>connaissance du type d'activité | |
| Les élèves<br><br>font face au professeur | Le professeur<br><br>Les élèves | présente le problème<br>et précise les outils disponibles<br>écoutent et prennent connaissance du problème | Énoncé<br>sur transparent |
| Les élèves<br>font face au professeur | Le professeur<br><br>Les élèves | vérifie l'appropriation de<br>la consigne en en demandant une reformulation<br>Un reformule sur la demande<br>du professeur<br>Les autres écoutent | Énoncé<br>sur transparent |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Les élèves font face au professeur | Le professeur | demande aux élèves de poser toutes les questions qu'ils veulent sur cet énoncé. Gère des débats permettant de répondre à des questions du type : M est n'importe où ? ... | Énoncé sur transparent |
| Les élèves sont en groupe de travail | Le professeur<br>Les élèves | donne le départ de la recherche<br>débutent la recherche | Papier Crayon |
| Les élèves sont en groupe de travail | Le professeur<br>Les élèves | reste à distance puis circule pour prendre de l'information sans intervenir lorsque les élèves sont absorbés par leur recherche<br>cherchent | Papier Crayon |

Cette première heure peut se terminer ainsi.
L'idéal serait que le débat autour des productions se déroulent dans l'heure suivante.
A défaut le professeur récupère les productions qu'il pourra étudier pour la séance suivante.

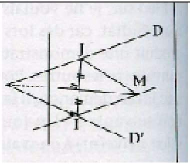
# Compte-rendus

- Des extraits d'un compte-rendu de Michel Mante :

Première séance :
Le temps de recherche
Les élèves ont été prévenus la veille que je consacrerais 2 heures à la recherche d'un problème ouvert. Avant de donner l'énoncé, je précise les consignes suivantes (ces consignes sont écrites au tableau) : « Premier temps : recherche individuelle (5 ou 10 minutes).
Deuxième temps : recherche par groupe ; vous rédigez vos résultats sur une affiche.
Troisième temps : discussion des affiches ; la classe décide du (ou des) groupe(s) vainqueur(s). »
J'écris l'enjeu au tableau (cf. scénario) et je remets un énoncé par élève.
Pendant quarante minutes, j'ai la sensation de ne pas intervenir. Je jette un coup d'oeil de temps en temps sur ce qui se passe dans les groupes. Deux questions me sont posées concernant l'existence d'une solution : je réponds qu'à ma connaissance il y a des solutions. Au bout d'une heure de recherche, des groupes me demandent une affiche pour rédiger leur message. Au bout d'une heure quinze, trois groupes ont rédigé leur message. Trois groupes n'ont encore rien rédigé. Je propose d'interrompre la recherche (Passer à la mise en commun alors que tous les groupes n'ont pas rédigé d'affiche pose problème, en particulier parce que les élèves de ces groupes risquent de se sentir frustrés au cours du débat et donc ne pas s'y impliquer. Lorsqu'il n'est pas possible d'avoir la totalité des messages dans le temps imparti, on peut imaginer de créer un jury avec les élèves qui n'ont pas produit de message.)
Je rappelle l'enjeu. J'enregistre les débats au magnétophone.

◂ Retour au Menu Une Intersection Inaccessible    ▸ Suite

Je propose à un rapporteur du premier groupe de passer au tableau, d'afficher son message et de le commenter.

| | |
|---|---|
| Message 1<br>Tracer les parallèles à D et D' qui passent par M (la parallèle à D coupe D'en I ; la parallèle à D' coupe D en J). Rechercher le milieu de $[IJ]$ Tracer la droite passant par M et par le milieu de $[IJ]$. |  |



F (pour le désigner par son initiale) commente ce message en refaisant la figure au tableau.
Je demande alors à F d'apporter des arguments pour convaincre ses camarades.
Il suggère que toute la classe essaie de refaire la figure proposée.
J'invite chacun à préciser ce qu'il pense de ce message.

Très rapidement des contestations apparaissent :
« Suivant la position de M, I et J n'existent pas toujours sur la feuille. »
Le groupe a beaucoup de peine à comprendre cette objection.
Finalement, c'est moi qui, en reprenant une explication d'un élève, arrive à les convaincre ! Je suggère alors que la classe se prononce sur ce message dans le cas où les points I et J existent.
Voici des extraits des dialogues entre les élèves :
L (membre du groupe) : « En regardant ce qu'il y a en dehors de la feuille, on voit qu'il existe un parallélogramme, et on a vu que les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu. [IJ], c'est une diagonale. Pour trouver l'autre il suffit de prendre le milieu de [IJ] et de tracer, ça vous donne, sans regarder, le prolongement »
Prof : « Vous êtes d'accord ? »
Certains élèves semblent convaincus, d'autres pas. À noter que les élèves convaincus essaient de convaincre les récalcitrants, même s'ils ne font pas partie du groupe émetteur.
Prof : « Qui n'est pas convaincu ?»
Une élève (Ma) lève la main mais ne prend pas tout de suite la parole.
E : « C'est une démonstration. »
E' : « Ça marchera toujours puisque les diagonales se coupent en leur milieu. »
Ma : « Il faudrait démontrer que c'est un parallélogramme. »
E : « On a les propriétés, » (Il fait référence aux propriétés vues l'an dernier.)
F : « Là, il y a deux parallèles, celle-ci et celle-ci, donc théoriquement si on trace entre ces deux parallèles la diagonale, c'est obligé que ça soit le milieu parce qu'il y a... On peut voir un parallélogramme, donc les diagonales comme elles se coupent en leur milieu... »
Finalement Ma n'est pas convaincue. Sa « non-conviction » semble sincère.
Fin de la première séance de 2 heures.

◂ Retour au Menu Une Intersection Inaccessible    ▸ Suite

## Un court compte-rendu en Première L

Cette activité a été mise en œuvre la dernière séance avant les vacances de Noël 2007.Le lancement du temps de recherche a été le suivant :
le professeur oralise le problème en l'illustrant en même temps au tableau :

« Sur une feuille sont tracées deux droites D et D' et un point M. Les deux droites sont sécantes en dehors de la feuille en O. Est-il possible de tracer la droite (MO) ? »

Aucun support n'est donné aux élèves qui utilisent le matériel qu'ils désirent.

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible    Suite

Ce type de lancement a de nombreuses conséquences. L'absence de support, la liberté d'utilisation de tous matériels ... va ici favoriser certaines procédures.

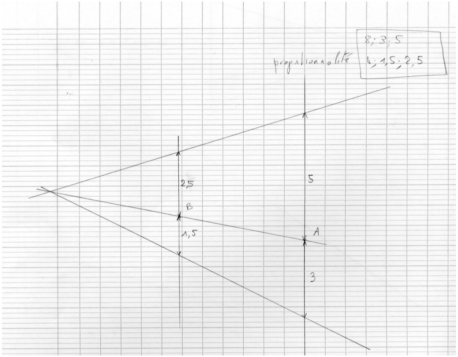
- Certains élèves éprouvent le besoin de demander comment ils doivent placer leurs droites et le point M. Lorsque l'enseignant précise que le problème est posé pour un point M quelconque, certains élèves s'empressent de placer M en un emplacement favorable. L'universalité est ici à travailler. Les autres, qui utiliseront les mesures, s'arrangent pour obtenir comme nous le verrons plus loin des mesures de longueur entières.
- Le support n'ayant pas été imposé, les élèves sortent tous une feuille quadrillée. Conséquence immédiate la direction du grand bord de la feuille est privilégiée. Les productions montrent toutes l'utilisation de cette direction.
- Tous les instruments étant autorisés, les élèves de ce groupe ont majoritairement sorti leur règle graduée et travaillé avec des mesures ( il se trouve par ailleurs qu'une élève particulièrement convaincante a su entraîner l'ensemble du groupe dans cette voie.)

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Avant d'aller plus loin, présentons une production caractéristique de ce groupe

Il s'agit pour cette élève de tracer (AO). Cet essai n'est pas le premier, mais on constate sur tous que sur la « verticale » les mesures des différents segments sont entières ou demi-entières. Ici ( 8 ; 5 et 3)




Les 55 minutes ne suffiront pas pour qu'une preuve claire soit élaborée. Les explications produites convaincront 2 élèves sur trois. Une des élèves restera sceptique.

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Sur la production précédente figure le mot proportionnalité. Ce fut apparemment une idée forte du groupe mais sans que ceci ne soit relié à une propriété géométrique. Un complément d'expérimentation serait nécessaire pour savoir si ce contexte de la mesure revient fréquemment ou non dans cette situation et si la proportionnalité ne permet pas un rebond.

Remarque : la piste ouverte par le groupe permettrait éventuellement de travailler plusieurs points : Après avoir mesuré les segments de longueur (8 ; 5 ; 3) les élèves cherchent à tracer un segment parallèle au premier, qui délimité par les deux droites a pour mesure $8/2 = 4$.

Cette difficulté n'a pas été approfondie et aurait peut-être permis de progresser.
Ils placent ensuite le point B sur ce nouveau segment pour avoir le triplet de mesures (4 ; 2,5 ; 1,5). Il reste à prouver que O, B et A sont alignés ! par exemple en utilisant le théorème de Thalès.

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible
Suite

# Objets mathématiques susceptibles d'être travaillés

Comme cela a été rapidement évoqué plus haut, ce problème est un problème de recherche. La mise en œuvre proposée est bien entendue liée à une attitude attendue des élèves et à une volonté du professeur de la faire vivre. Elle permet de travailler de nombreuses compétences.

Nous ne développerons pas ici d'analyse sur les compétences liées à l'activité de résolution de problème proprement dite ( savoir mettre en œuvre une démarche scientifique, savoir oser, réaliser des essais avec ou sans outils, dégager des sous-problèmes, changer de cadres, conjecturer, se poser le problème de la démonstration, de la preuve...).

L'objectif ici est de proposer une liste d'objets, de propriétés, de raisonnements mathématiques que l'on sait susceptibles d'apparaître lors d'une telle activité. Tous les éléments de cette liste ont été observés lors d'expérimentations dans de « vraies » classes, dans des conditions de fonctionnement habituel.

Cette présentation doit permettre d'aider le professeur à prévoir et repérer les apparitions de points intéressants dans le contexte de la recherche en classe et d'aider à préparer les mises en commun et synthèses avec les élèves.

◂ Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

▸ Suite

| Programmes Cinquième | Objets travaillés |
|---|---|
| Notions de parallèle, perpendiculaire.<br><br>Tracer par un point donné la parallèle à une droite donnée. | Utiliser en acte les résultats sur les homothéties pour obtenir un troisième point de la droite cherchée. |
| Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante et leurs réciproques.<br><br>L'usage du rapporteur, découvert en Sixième, doit faire l'objet d'un approfondissement en Cinquième<br><br>À cette occasion, le vocabulaire suivant est également utilisé : ... angles alternes-internes, ... | Le tracé d'une parallèle et l'utilisation des angles alternes-internes permet dans une des versions du problème de déterminer l'angle cherché. |

◂ Retour au Menu Une Intersection Inaccessible   ▸ Suite

| Programmes Cinquième | Objets travaillés |
|---|---|
| Connaître et utiliser une définition et les propriétés (relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles) du parallélogramme. | Construire un parallélogramme dont une des diagonales est la droite cherchée. |

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

| Programmes Cinquième | Objets travaillés |
|---|---|
| Connaître et utiliser une définition et les propriétés (relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles) du parallélogramme. | Construire un parallélogramme dont une des diagonales est la droite cherchée. |

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible
Suite

| Programmes Cinquième | Objets travaillés |
|---|---|
| Médianes et hauteurs d'un triangle : connaître et utiliser la définition d'une médiane et d'une hauteur d'un triangle. Des activités de construction ou l'usage d'un logiciel de géométrie permettent de mettre en évidence les propriétés de concours des médianes et des hauteurs d'un triangle. | Considérer un triangle MBC avec B sur (d'), C sur (d) et tel que (d) et (d') soient deux hauteurs de ce triangle. Alors la droite cherchée sera la hauteur issue de M, c'est à dire la perpendiculaire en M à (BC).<br>O est ici l'orthocentre de MBC. |

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

| Programmes Quatrième | Objets travaillés |
|---|---|
| Faire fonctionner les résultats mis en place sur les figures usuelles déjà étudiées (quadrilatères particuliers) | Utilisation du parallélogramme pour tracer des parallèles et/ou pour reporter des longueurs. |
| Savoir construire deux suites proportionnelles | Considérer les triplets proportionnels $(a; x; a-x)$ et $\left(\frac{a}{2}; \frac{x}{2}; \frac{a-x}{2}\right)$ |

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

| Programmes Quatrième | Objets travaillés |
| --- | --- |
| Triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes : connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes : Dans un triangle ABC, où M est un point du côté [AB] et N un point du côté [AC], si (MN) est parallèle à (BC), alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$. | Le théorème de Thalès dans différents triangles permet de prouver que O,P,M sont alignés. |

| Programmes Quatrième | Objets travaillés |
|---|---|
| Bissectrice d'un angle : Connaître et utiliser la définition de la bissectrice. La bissectrice d'un angle est définie comme la demi-droite qui partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure.<br>La justification de la construction de la bissectrice à la règle et au compas est reliée à la symétrie axiale. Elle n'est pas exigible dans le cadre du socle. | Considérer un triangle MBC avec B sur (d'), C sur (d) et tel que (d) et (d') soient deux bissectrices intérieures ou extérieures du triangle MBC. Alors la droite cherchée sera la bissectrice de l'angle $\widehat{BMC}$. O est ici le centre du cercle inscrit ou exinscrit du triangle MBC. |

| Programmes Troisième | Objets travaillés |
|---|---|
| L'étude du théorème de Thalès et de sa réciproque est l'occasion de traiter des situations de proportionnalité dans le cadre géométrique.<br>Elle conforte la prise de conscience par les élèves des liens qui existent entre divers domaines des mathématiques. | Reprise des procédures vues en classe de quatrième. |

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible
Suite

| Programmes Seconde | Objets travaillés |
|---|---|
| Utiliser, pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées. | La diversité des approches de ce problème permet de travailler de nombreux points de vue. |
| Les problèmes seront choisis de façon :<br>- à inciter à la diversité des points de vue, dans un cadre théorique volontairement limité ;<br>- à poursuivre l'apprentissage d'une démarche déductive ;<br>- à conduire vers la maîtrise d'un vocabulaire logique adapté (implication, équivalence, réciproque, etc.). | La diversité des cadres et des types de raisonnement font de ce problème un candidat très pertinent à ce niveau. |

◂ Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

▸ Suite

| Programmes Premières et Terminales | Objets travaillés |
|---|---|
| Translations et homothéties dans le plan et l'espace : définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les longueurs, les aires et les volumes ; image d'une figure (segment, droite, cercle). | Plusieurs approches sont possibles pour travailler par exemple avec l'homothétie ; homothétie de centre M transformant D et D' ou homothétie de centre O transformant par exemple une sécante à D et D' en une sécante parallèle. |

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible
Suite

| Terminale et au delà |
| --- |
| Compositions de transformations : Une preuve présentée dans la partie situation mathématique utilise de telles compositions |
| Résultats de géométrie classique : Théorème de Desargues et bien d'autres : voir esquisse de preuves dans la ressource ou les liens proposés. |

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible
Suite

## Lectures :

1 : Les pratiques du problème ouvert - G. Arsac, M. Mante - Sceren Irem septembre 2007

2 : Carrega J.-C. - Théorie des corps : la règle et le compas - Hermann 2001

3 : Le plaisir de chercher, la joie de trouver - François Padilla - Jean Aymes - Bulletin APMEP n°350 - septembre 1985

4 : A propos d'un problème de géométrie - Henri Fraysse - Bulletin APMEP n°352 - février 1986

5 : La 16e solution - Claude Tisseron - Bulletin APMEP n°356 - décembre 1986

6 : Le théorème de Desargues (deux sites à voir) :

Wikipédia    Apport de J. Germoni