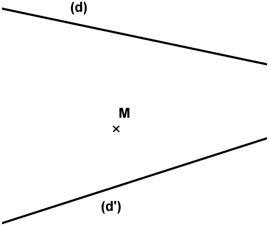
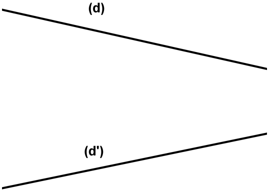
Une Intersection Inaccessible

Sachant que (d) et (d') ne se coupent pas sur la feuille





Peux-tu tracer la droite passant par le point M et par le point O intersection de (d) et (d') ?

Peux-tu déterminer l'angle des deux droites ?

Une situation à mettre en œuvre de la quatrième à la terminale en deux à trois heures suivant les niveaux et les objectifs.

Menu Général de la situation

- Situation mathématique ▸ Voir
- Objets mathématiques potentiellement travaillés ▸ Voir
- Situations d'apprentissage ▸ Voir
- Références ▸ Voir
- Synthèse ▸ Voir
- Situations connexes ▸ Voir

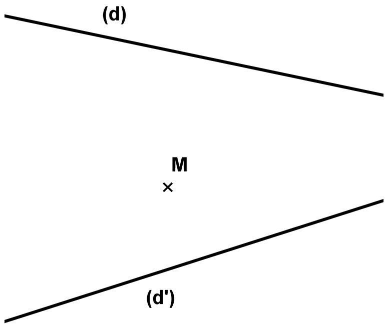
◂ Retour au Menu Général

Situation Mathématique

Sachant que le point d'intersection de deux droites est inaccessible, trouver une droite passant par ce point.

Situation Mathématique

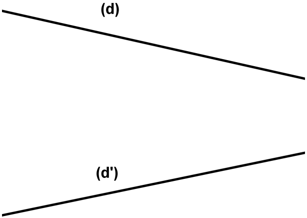
L'étude de la situation mathématique a été particulièrement développée. Voici quelques solutions :

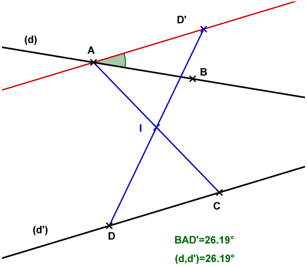


Des Propositions

Analyse du Problème

Commençons par la détermination de l'angle de deux droites avec une méthode accessible au collège.





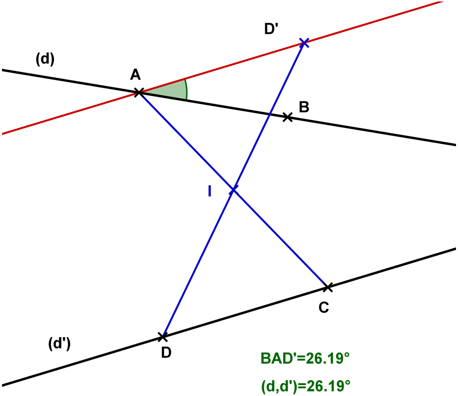
Voir une Animation

Placer des points A et B sur (d), C et D sur (d'). Soit I le milieu de [AC] et D' le symétrique de D par rapport à I. La droite (AD') est parallèle à (d') et l'angle $\widehat{BAD'}$ représente l'angle des droites (d) et (d'). En effet les angles alternes-internes $\widehat{BAD'}$ et $\widehat{AOD}$, par rapport à la sécante (AO), sont égaux.

Analyse du Problème

Une animation :

Cliquer sur l'image pour voir l'animation



Analyse du Problème

Une Intersection Inaccessible

Retour aux situations

Menu général de la situation

Situation mathématique

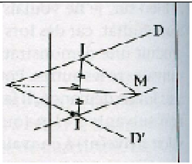
Objets potentiellement travaillés

Références

Situations connexes

Détermination de la droite passant par un point de la page et par l'intersection inaccessible.

Voici des propositions d'élèves extraites de l'ouvrage « problème ouvert et situation-problème » de l'IREM de Lyon.

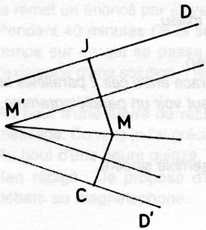
Message 1 Tracer les parallèles à D et D' qui passent par M (la parallèle à D coupe D'en I ; la parallèle à D' coupe D en J). Rechercher le milieu de $[IJ]$ Tracer la droite passant par M et par le milieu de $[IJ]$.	

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Analyse du Problème

Encore une :



Tracer la perpendiculaire à D qui passe par M, elle coupe D en J .
Tracer la perpendiculaire à D' qui passe par M, elle coupe D'en C.
Tracer la parallèle à D qui passe par le milieu de [MJ]
Tracer la parallèle à D' qui passe par le milieu de [MC]
Ces 2 parallèles se coupent en M'
Tracer la droite (MM').

Et si l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ ne suffit pas , on peut utiliser l'homothétie de rapport $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$

Variante :

Une variante de la méthode 1 proposée par les élèves peut être de construire un parallélogramme de centre M, dont les côtés sont portés par (d) et (d'). Pour cela il suffit de construire les droites symétriques de (d) et (d') par rapport à M. On obtient un parallélogramme dont une diagonale est la droite cherchée :

Voir une Construction

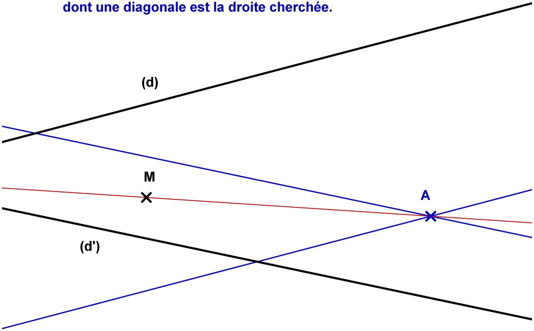
Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

La construction :

Cliquer sur l'image pour voir la vidéo

Pour cela il suffit de construire les droites symétriques de (d) et (d') par rapport à M. On obtient un parallélogramme dont une diagonale est la droite cherchée.



Analyse du Problème

Utilisation de droites remarquables du triangle :

Considérer un triangle MNP avec N sur (d'), P sur (d) et tel que (d) et (d') soient deux hauteurs de ce triangle.
Alors la droite cherchée sera la hauteur issue de M, c'est à dire la perpendiculaire en M à (NP).
O est ici l'orthocentre de MNP.

On peut aussi considérer un triangle MNP avec N sur (d'), P sur (d) et tel que (d) et (d') soient deux bissectrices intérieures ou extérieures du triangle MNP.
Alors la droite cherchée sera la bissectrice de l'angle $\widehat{NMP}$.
O est ici le centre du cercle inscrit ou exinscrit du triangle MNP.

Analyse du Problème

Méthode utilisant la réflexion, et le centre de gravité :

Outils

- Réflexion
- Centre de gravité comme concours des médianes
- Centre de gravité comme point situé sur une médiane, à $\frac{2}{3}$ du sommet.
- Homothétie ou construction d'un point M défini par : $\overrightarrow{AM} = \mathrm{k}\ \overrightarrow{AB}$

L'idée de cette méthode consiste à remarquer que même si l'on ne connaît pas le point O, on peut dire que l'on sait que le triangle MOO' a pour médiane le segment [MI].

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Analyse du Problème

Une Intersection Inaccessible

Retour aux situations

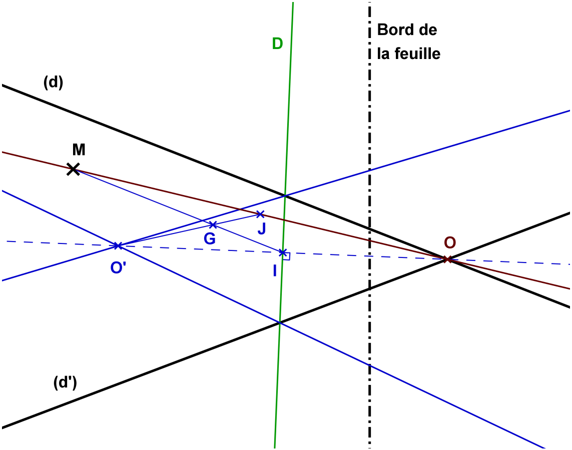
Menu général de la situation

Situation mathématique

Objets potentiellement travaillés

Références

Situations connexes



Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Analyse du Problème

Voici la construction et sa justification :

D est une droite située dans le demi-plan de frontière le bord de la feuille, contenant M.
Elle n'est pas nécessairement parallèle au bord de la feuille.

On construit les symétriques des droites (d) et (d') par rapport à D, ce qui permet de construire O', symétrique de O par rapport à la droite D.
On note I le projeté orthogonal de O' sur la droite D.

On construit G, centre de gravité du triangle MOO', en utilisant le fait que G est au 2/3 de la médiane [MI], en partant de M.

On construit ensuite le point J tel que $\overrightarrow{O'J} = \frac{3}{2}\ \overrightarrow{O'G}$.

Le point J est alors le milieu du côté [MO] .

La droite cherchée, (MO), est donc la droite (MJ).

Analyse du Problème

Une dernière parmi d'autres :

Notons D une droite qui ne passe pas par M et D' la parallèle à D qui passe par M.

On construit les symétriques de (d) et de (d') par rapport à D, et O' est leur intersection.

Appelons O" le symétrique de O' par rapport à D'.

On peut noter t la translation de vecteur $2\vec{u}$ (c'est la composée de ces deux symétries) où $\vec{u}$ est le vecteur amenant D sur D' et tel que $\vec{u} \perp D$.

On construit alors l'image M' de M par t.

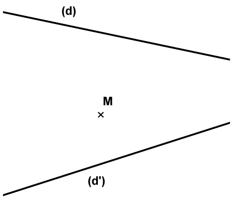
Et donc on a : (OM)//(O"M')

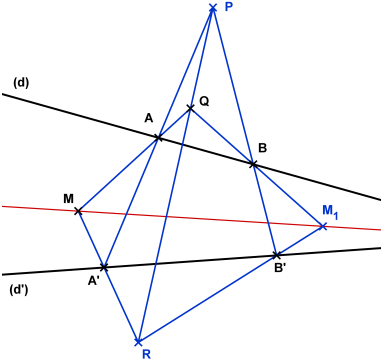
Pour tracer (OM) il suffit donc de mener par le point M la parallèle à la droite (O"M').

Analyse du Problème

Une solution avec le théorème de Desargues :

Des Liens





Placer deux points A et B sur (d), deux points A' et B' sur (d') et un point Q sur la droite (AM). Les droites (AA') et (BB') se coupent en P, la droite (MA') coupe (PQ) en R. Les droites (QB) et (RB') se coupent en M_1.
La droite (MM_1) passe par O.

Analyse du Problème

Le théorème de Desargues (deux sites à voir) :

Wikipédia

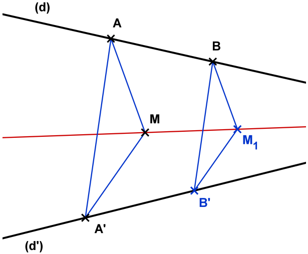
Apport de J. Germoni

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Analyse du Problème

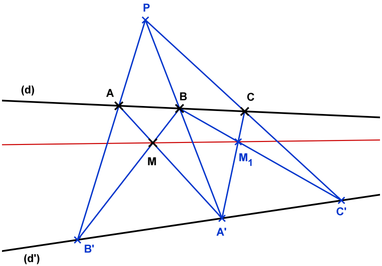
Deuxième proposition, encore avec Desargues :



Cas où les droites (AA') et (BB') sont parallèles.
Dans le plan projectif la droite (PQ) est alors la droite de l'infini.
Placer deux points A et B sur (d) et un point A' sur (d').
La parallèle à (AA') passant par B coupe (d') en B'.
Les parallèles à (AM) et (A'M) passant par B et B' se coupent en M_1.
La droite (MM_1) passe par O.

Analyse du Problème

Utilisons une polaire :



Placer deux points A et B sur (d). La droite (MA) coupe (d') en A' et la droite (MB) coupe (d') en B'.Le point P intersection de (AB') et (A'B) est un point de la polaire de M. Construire la polaire de P par rapport à (d) et (d') :
placer un point C, distinct de A et B, sur (d). La droite (PC) coupe (d') en C'. Le point M_1 intersection de (A'C) et (BC') est un point de la polaire de P.
La droite (MM_1), polaire de P, passe par O.

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Analyse du Problème

Une Intersection Inaccessible

Retour aux situations

Menu général de la situation

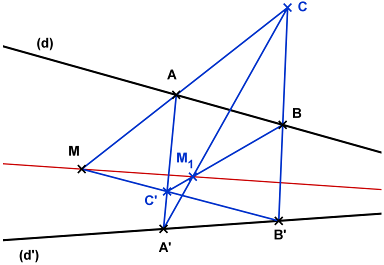
Situation mathématique

Objets potentiellement travaillés

Références

Situations connexes

Construction à la règle seule d'Ocagne :



Les droites (MA) et (BB') se coupent en C, les droites (MB') et (AA') se coupent en C'.
Les droites (BC') et (A'C) se coupent en M_1.
La droite (MM_1) passe par le point O.

Vous trouverez encore d'autres constructions sur :

maths.ac-aix-marseille.fr/debart/ts/pointinaccessible

et des compléments dans les ouvrages cités dans la rubrique Références.

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Objets Mathématiques Potentiellement Travaillés

Programmes de Cinquième	**Objets travaillés**
Notions de parallèle, perpendiculaire. Tracer par un point donné la parallèle à une droite donnée.	Utiliser en acte les résultats sur les homothéties pour obtenir un troisième point de la droite cherchée.
Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante et leurs réciproques. L'usage du rapporteur, découvert en Sixième, doit faire l'objet d'un approfondissement en Cinquième À cette occasion, le vocabulaire suivant est également utilisé : ... angles alternes-internes, ...	Le tracé d'une parallèle et l'utilisation des angles alternes-internes permet dans une des versions du problème de déterminer l'angle cherché.

Objets Mathématiques Potentiellement Travaillés

Programmes de Cinquième	**Objets travaillés**
Construire le symétrique d'un point, d'un segment, d'une droite.	Construire le symétrique de (d) et (d') par rapport à M. L'intersection de ces deux nouvelles droites (si elle existe sur la page) fournit un troisième point de la droite cherchée.
Construire ou compléter la figure symétrique d'une figure donnée ou de figures possédant un axe ou un centre de symétrie à l'aide de la règle (graduée ou non), de l'équerre, du compas, du rapporteur.	

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Objets Mathématiques Potentiellement Travaillés

Programmes de Cinquième	**Objets travaillés**
Connaître et utiliser une définition et les propriétés (relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles) du parallélogramme.	Construire un parallélogramme dont une des diagonales est la droite cherchée.

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Objets Mathématiques Potentiellement Travaillés

Programmes de Cinquième	**Objets travaillés**
Médianes et hauteurs d'un triangle : connaître et utiliser la définition d'une médiane et d'une hauteur d'un triangle. Des activités de construction ou l'usage d'un logiciel de géométrie permettent de mettre en évidence les propriétés de concours des médianes et des hauteurs d'un triangle.	Considérer un triangle MNP avec N sur (d'), P sur (d) et tel que (d) et (d') soient deux hauteurs de ce triangle. Alors la droite cherchée sera la hauteur issue de M, c'est à dire la perpendiculaire en M à (NP). O est ici l'orthocentre de MNP.

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Objets Mathématiques Potentiellement Travaillés

Programmes de Quatrième	**Objets travaillés**
Faire fonctionner les résultats mis en place sur les figures usuelles déjà étudiées (quadrilatères particuliers)	Utilisation du parallélogramme pour tracer des parallèles et/ou pour reporter des longueurs.
Savoir construire deux suites proportionnelles	Considérer les triplets proportionnels $(a; x; a-x)$ et $\left(\frac{a}{2}; \frac{x}{2}; \frac{a-x}{2}\right)$

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Objets Mathématiques Potentiellement Travaillés

Une Intersection Inaccessible

Retour aux situations

Menu général de la situation

Situation mathématique

Objets potentiellement travaillés

Références

Situations connexes

Programmes de Quatrième	**Objets travaillés**
Triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes. Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes. Dans un triangle ABC, où M est un point du côté [AB] et N un point du côté [AC], si (MN) est parallèle à (BC), alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.	Le théorème de Thalès dans différents triangles permet de prouver que O,P,M sont alignés.

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Objets Mathématiques Potentiellement Travaillés

Programmes de Quatrième	**Objets travaillés**
Bissectrice d'un angle : connaître et utiliser la définition de la bissectrice. La bissectrice d'un angle est définie comme la demi-droite qui partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure. La justification de la construction de la bissectrice à la règle et au compas est reliée à la symétrie axiale. Elle n'est pas exigible dans le cadre du socle.	Considérer un triangle MNP avec N sur (d'), P sur (d) et tel que (d) et (d') soient deux bissectrices intérieures ou extérieures du triangle MNP. Alors la droite cherchée sera la bissectrice de l'angle $\widehat{NMP}$. O est ici le centre du cercle inscrit ou exinscrit du triangle MNP.

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Objets Mathématiques Potentiellement Travaillés

Programmes de Troisième	**Objets travaillés**
L'étude du théorème de Thalès et de sa réciproque est l'occasion de traiter des situations de proportionnalité dans le cadre géométrique. Elle conforte la prise de conscience par les élèves des liens qui existent entre divers domaines des mathématiques.	Reprise des procédures vues en classe de Quatrième.

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Objets Mathématiques Potentiellement Travaillés

Programmes de Seconde	**Objets travaillés**
Utiliser, pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées.	La diversité des approches de ce problème permet de travailler de nombreux points de vue.
Les problèmes seront choisis de façon : - à inciter à la diversité des points de vue, dans un cadre théorique volontairement limité ; - à poursuivre l'apprentissage d'une démarche déductive ; - à conduire vers la maîtrise d'un vocabulaire logique adapté (implication, équivalence, réciproque, etc.).	La diversité des cadres et des types de raisonnement font de ce problème un candidat très pertinent à ce niveau.

Objets Mathématiques Potentiellement Travaillés

Programmes de Premières et de Terminales	**Objets travaillés**
Translations et homothéties dans le plan et l'espace : définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les longueurs, les aires et les volumes ; image d'une figure (segment, droite, cercle).	Plusieurs approches sont possibles pour travailler par exemple avec l'homothétie ; homothétie de centre M transformant (d) et (d') ou homothétie de centre O transformant par exemple une sécante à (d) et (d') en une sécante parallèle.

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Suite

Objets Mathématiques Potentiellement Travaillés

Terminale et au delà	**Objets travaillés**
Compositions de transformations	Une preuve présentée dans la partie situation mathématique utilise de telles compositions.
Résultats de géométrie classique : Théorème de Desargues	Des références sont proposées sous formes de liens.

Références

Site :

maths.ac-aix-marseille.fr/debart/ts/pointinaccessible

Références

Lectures :

1 : Les pratiques du problème ouvert - G. Arsac, M. Mante - Sceren Irem septembre 2007

2 : Carrega J.-C. - Théorie des corps : la règle et le compas - Hermann 2001

3 : Le plaisir de chercher, la joie de trouver - François Padilla - Jean Aymes - Bulletin APMEP n°350 - septembre 1985

4 : A propos d'un problème de géométrie - Henri Fraysse - Bulletin APMEP n°352 - février 1986

5 : La 16e solution - Claude Tisseron - Bulletin APMEP n°356 - décembre 1986

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible

Situations Connexes

Une Intersection Inaccessible

Retour aux situations

Menu général de la situation

Situation mathématique

Objets potentiellement travaillés

Références

Situations connexes

Configurations et Symétries

Retour au Menu Une Intersection Inaccessible